

# Výzkum TIMSS 2007

## Úlohy z matematiky pro 8. ročník

Vladislav Tomášek a kol.



Ústav pro informace ve vzdělávání  
Praha 2009

Tato publikace byla vydána jako plánovaný výstup projektu LA 340 programu INGO financovaného z prostředků MŠMT ČR.

© Vladislav Tomášek a kol., 2009

© Ústav pro informace ve vzdělávání, 2009

ISBN 978-80-211-0591-1

# Obsah

<b>Úvod</b> .....	5
<b>1 Čísla</b> .....	7
1.1 Přirozená čísla .....	7
1.2 Zlomky a desetinná čísla .....	15
1.3 Celá čísla .....	25
1.4 Poměr, úměrnost a procenta .....	27
<b>2 Algebra</b> .....	35
2.1 Řady a posloupnosti .....	35
2.2 Algebraické výrazy .....	41
2.3 Rovnice, vzorce a funkce .....	46
<b>3 Geometrie</b> .....	51
3.1 Geometrické tvary .....	51
3.2 Geometrické měření .....	64
3.3 Poloha a změna polohy .....	71
<b>4 Data a pravděpodobnost</b> .....	77
4.1 Uspořádání a znázornění dat .....	77
4.2 Interpretace dat .....	86
4.3 Pravděpodobnost .....	90
<b>Příloha 1 Matematické dovednosti</b> .....	105
<b>Příloha 2 Popis vědomostních úrovní v matematice</b> .....	107

# Úvod

Výzkum TIMSS<sup>1</sup> je projektem Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání IEA.<sup>2</sup> Jeho hlavním záměrem je získat informace, které mohou pomoci při zvyšování úrovně vědomostí a dovedností žáků zúčastněných zemí v matematice a přírodovědných předmětech. Tyto informace jsou určeny jak tvůrcům vzdělávací politiky, tak učitelům a dalším odborníkům v oblasti školství.

Výzkum probíhá ve čtyřletých cyklech, Česká republika se jej zúčastnila v letech 1995, 1999 a 2007. Výzkum se zabývá nejen výsledky žáků na prvním i druhém stupni povinné školní docházky (4. a 8. ročník), v centru jeho pozornosti jsou též žáci na konci středoškolského studia. Žáci 8. ročníku povinné školní docházky byli v České republice testováni v letech 1995, 1999 a 2007.

## Výsledky českých žáků 8. ročníku v matematice<sup>3</sup>

Od roku 1995 do roku 2007 se výsledky českých žáků 8. ročníku v matematice výrazně zhoršily. Toto zhoršení bylo třetí největší ze všech evropských zemí a členských zemí OECD, které se výzkumu v obou letech zúčastnily. Nejvýraznější pokles ve výsledku českých žáků však byl zaznamenán v období do roku 1999, kdy byl ze všech zúčastněných zemí největší. Kromě toho patřila v roce 1999 Česká republika k zemím s největším rozdílem ve výsledcích chlapců a dívek ve prospěch chlapců. Protože se ale chlapci zhoršili do roku 2007 mnohem více než dívky, výsledky českých chlapců a dívek se v roce 2007 téměř nelišily.

## Co je cílem publikace

Publikace obsahuje matematické úlohy výzkumu TIMSS pro žáky 8. ročníku základní školy a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Jde o úlohy uvolněné ke zveřejnění.

Je určena zejména učitelům druhého stupně základní školy a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií, kteří si tak mohou udělat představu o tom, jaké matematické znalosti mezinárodní výzkum TIMSS u žáků zjišťuje a jaké úlohy k tomu používá. Mohou ji využít přímo ve výuce a vyzkoušet, zda by některé úlohy dělaly problémy žákům jejich školy. Publikaci rovněž mohou využít pedagogové a studenti vysokých škol připravujících učitele.

## Struktura publikace

Všechny úlohy v publikaci mají stejnou následující strukturu. Úlohy mají označení **M + číslo úlohy**, v závorce za tímto označením naleznete **kód** úlohy, pod kterým byla uvedena v testovém sešitu v rámci šetření TIMSS. Testové sešity jsou dostupné v elektronické podobě na adrese [www.uiv.cz/clanek/244/1198](http://www.uiv.cz/clanek/244/1198).

Za zadáním úlohy následuje její stručná charakteristika: obsah, cíl úlohy, dovednost, obtížnost.

**Obsah** je vymezen učivem, jehož zvládnutí je testováno.

**Cíl úlohy** podrobněji charakterizuje, co by měl žák umět, aby úlohu zdárně vyřešil.

Dále jsou zde zmíněny **dovednosti**, které má žák při řešení úlohy prokázat. Popis matematických dovedností sledovaných výzkumem TIMSS je v *Příloze 1*.

Na závěr je uveden stupeň **obtížnosti** (1–4), který určuje vědomostní úroveň žáků. Podrobný popis vědomostních úrovní pro matematiku je uveden v *Příloze 2*.

Následuje tabulka nabízející srovnání **úspěšnosti** českých žáků s mezinárodním průměrem. Uvádí zvlášť úspěšnost dívek a chlapců. Některé úlohy byly součástí testů výzkumu TIMSS již v roce 1999, u nich je pro srovnání navíc uvedena úspěšnost českých žáků z tohoto roku.

<sup>1</sup> Trends in International Mathematics and Science Study

<sup>2</sup> International Association for the Evaluation of Educational Achievement

<sup>3</sup> S výsledky českých žáků v mezinárodním kontextu se můžete seznámit v publikaci Tomášek, V. a kol.: *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?*

Další částí je **hodnocení**. Úlohy jsou rozděleny do dvou kategorií: *úloha s tvorbou odpovědi* a *úloha s výběrem odpovědi*. U úloh s tvorbou odpovědi je uvedena tabulka s podrobným popisem vyhodnocování žakovských odpovědí. U druhého typu úloh tato tabulka není, ale je uvedena správná odpověď.

Vždy je uvedena tabulka **četností** jednotlivých odpovědí českých žáků.

Úloha je zakončena krátkým **komentářem**, jehož autory jsou odborníci v testovaných oblastech. Komentář nabízí rozbor řešení úlohy, zamýšlí se nad úspěchem či neúspěchem žáků na českých školách nebo hledá příčiny jejich chybných výsledků.

# 1 ČÍSLA

V 8. ročníku je porozumění číslům rozšířeno z přirozených čísel na čísla celá, včetně porozumění jejich uspořádání, velikosti a operacím s nimi. Při počítání je však kladen důraz především na zlomky a desetinná čísla. Žáci by měli chápat, jaké množství použité symboly reprezentují, a měli by být schopni plynule přecházet mezi ekvivalentními zlomky, desetinnými čísly a procenty.

Oblast učiva *čísla* je rozdělena do čtyř tematických celků: přirozená čísla; zlomky a desetinná čísla; celá čísla; poměr, úměrnost a procenta.

## 1.1 PŘIROZENÁ ČÍSLA

### Úloha M1 (M02-01)

Ve které skupině jsou čísla seřazena od NEJVĚTŠÍHO k NEJMENŠÍMU?

- A) 10 011; 10 110; 11 001; 11 100
- B) 10 110; 10 011; 11 100; 11 001
- C) 11 001; 11 100; 10 110; 10 011
- D) 11 100; 11 001; 10 110; 10 011

Obsah: přirozená čísla

Cíl úlohy: porozumění řádům čísel a zvládnutí čtyř početních operací

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	77,5	74,5	80,2
Mezinárodní průměr	59,8	60,2	59,4

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

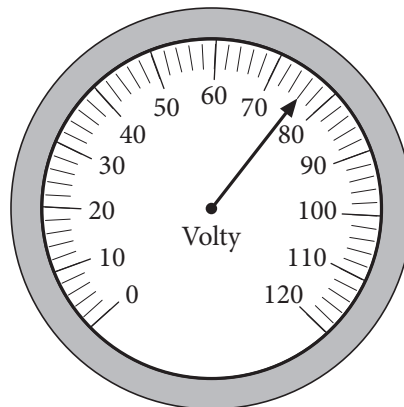
Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	7,4	8,7	5,1	77,5

V úloze neměli žáci seřadit čtyři čísla od největšího k nejmenšímu, ale rozhodnout, která čtveřice čísel je takto uspořádána. Cílem úlohy je objevit chybu a vést žáky ke kontrole výsledků vlastní nebo cizí práce. V úspěšnosti řešení překonali čeští žáci mezinárodní průměr, přičemž naši chlapci byli úspěšnější než dívky.

**Úloha M2 (M03-01)**

Jaké napětí ukazuje ručička voltmetru?

- A) 73 V
- B) 74 V
- C) 76 V
- D) 78 V



Obsah: přirozená čísla

Cíl úlohy: porozumění řádům čísel a zvládnutí čtyř početních operací

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	77,2	70,9	83,1
Česká republika 2007	72,3	69,8	74,8
Mezinárodní průměr	52,8	48,5	57,1

Hodnocení

**Správná odpověď: C**

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	23,1	1,3	72,3	2,7

V úloze mají žáci na kruhové stupnici s jednotkou větší než jedna přiřadit vyznačenému bodu odpovídající hodnotu. Jde o úlohu z oblasti numerace přirozených čísel (vyznačování, resp. čtení čísel na číselné ose). Téměř čtvrtina českých žáků nesprávně interpretovala stupnici (1 dílek = 2 V). Úspěšnost řešení českých žáků byla výrazně vyšší než mezinárodní průměr, přesto nedosáhla hodnoty z roku 1999.

**Úloha M3 (M04-01)**

Které z uvedených čísel je deset miliónů dvacet tisíc třicet?

- A) 102 030
- B) 10 020 030
- C) 10 200 030
- D) 102 000 030

Obsah: přirozená čísla

Cíl úlohy: porozumění řádům čísel a zvládnutí čtyř početních operací

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 1

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	90,7	87,2	94,2
Mezinárodní průměr	64,5	62,2	66,9

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	0,7	90,7	4,8	3,4

Úloha zjišťuje, zda žáci umí k číslu zapsanému slovy najít odpovídající zápis pomocí číslic. Úloha měla vysokou úspěšnost řešení a čeští žáci velmi výrazně překonali mezinárodní průměr.

**Úloha M4 (M04-02)**

Ve kterém zápisu je číslo 1 080 rozloženo na součin prvočísel?

- A)  $1\ 080 = 8 \cdot 27 \cdot 5$
- B)  $1\ 080 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5$
- C)  $1\ 080 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- D)  $1\ 080 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6 \cdot 5$

Obsah: přirozená čísla

Cíl úlohy: určování násobků a dělitelů čísel, odečítání hodnot ze stupnic a rozpoznávání prvočísel

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	55,2	56,2	54,3
Mezinárodní průměr	44,1	45,9	42,3



Hodnocení

**Správná odpověď: C**

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	17,4	11,9	55,2	6,3

Úloha ověřuje, zda žáci znají pojem prvočíslo, rozumí mu a v konkrétním případě dokážou rozhodnout, je-li dané číslo prvočíslo, či nikoliv. Žáci, kteří vybrali nesprávnou odpověď, zřejmě tento pojem neznají.

**Úloha M5 (M04-05)****Triatlon**

Triatlon je závod, ve kterém sportovci nejprve plavou, pak jedou na kole a potom běží. První závodník, který dokončí celý závod, se stává vítězem. Katka, Barbora a Zuzana soutěžily navzájem v triatlonu. Závod, který absolvovaly, sestával z 1 kilometru plavání, následovalo 40 kilometrů jízdy na kole a pak 15 kilometrů běhu.

- A. Barbora byla nejrychlejší plavkyní a vzdálenost 1 km uplavala za 25 minut. Katce to trvalo o 10 minut déle než Barboře a Zuzaně to trvalo o 5 minut déle než Katce.

Použij tyto informace k doplnění tabulky pro plavání:

Plavání	Katka	Barbora	Zuzana
Čas (minuty)		25	

- B. Katka byla nejrychlejší cyklistkou. Úsek 40 km ujela průměrnou rychlostí 30 kilometrů za hodinu. Barboře to trvalo o 10 minut déle než Katce a Zuzaně to trvalo o 15 minut déle než Katce.

Použij tyto informace k doplnění tabulky pro jízdu na kole:

Jízda na kole	Katka	Barbora	Zuzana
Čas (minuty)			

- C. Zuzana byla nejrychlejší běžkyní. Úsek 15 km uběhla průměrnou rychlostí 7,5 km za hodinu. Barboře to trvalo o 10 minut déle než Zuzaně a Katce to trvalo o 5 minut déle než Barboře.

Použij tyto informace k doplnění tabulky pro běh:

Běh	Katka	Barbora	Zuzana
Čas (minuty)			

- D. Doplně v tabulce celkový čas, který každá závodnice potřebovala k dokončení triatlonu.

Triatlon	Katka	Barbora	Zuzana
Čas (minuty)			

Kdo v triatlonu zvítězil?

Obsah: A přirozená čísla

B poměr, úměrnost a procenta

C poměr, úměrnost a procenta

D přirozená čísla

Cíl úlohy: A řešení úloh výpočtem, odhadem a s využitím zaokrouhlování

B řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti

C řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti

D řešení úloh výpočtem, odhadem a s využitím zaokrouhlování

Dovednost: A používání znalostí

B používání znalostí

C používání znalostí

D uvažování

Obtížnost: A úroveň 2

B úroveň 4

C úroveň 4

D úroveň 3

A

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	86,0	88,4	83,6
Mezinárodní průměr	57,8	58,9	56,7

B

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	22,5	17,8	27,2
Mezinárodní průměr	13,3	11,4	15,1

C

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	39,2	31,4	46,9
Mezinárodní průměr	21,6	18,9	24,3

D

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	50,7	49,5	51,9
Mezinárodní průměr	32,6	32,4	32,8

Hodnocení

A

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	Katka 35, Zuzana 40.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	Katka 35, Zuzana 30.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	86,0	3,7	7,0	3,3

Velmi jednoduchá slovní úloha, kterou by měli vyřešit žáci na prvním stupni. Při jejím řešení využívají žáci vztahy o n-více (méně). Českým žákům nečinilo správné vyřešení úlohy větší problémy, téměř o 30 % překonali mezinárodní průměr úspěšnosti řešení.

B

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
20	Katka 80, Barbora 90, Zuzana 95 (uznávejte také čas uvedený v hodinách a minutách).
<b>Částečně správná odpověď</b>	
10	Barbora o 10 více, než je hodnota pro Katku; Zuzana o 15 více než hodnota pro Katku.
11	Katka 80, minimálně jeden další údaj není uveden nebo je nesprávný.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	20	10	11	79	99
Četnost [%]	22,5	38,8	2,3	23,8	12,5

Složená slovní úloha. V prvním kroku řešení úlohy uplatňují žáci znalosti z fyziky – výpočet času pohybu pomocí dráhy a průměrné rychlosti spojený s převodem jednotek. Druhý krok řešení obsahově odpovídá části A úlohy. Jen pro přibližně 25 % českých žáků nebyl první krok řešení úlohy problémem (kódy hodnocení 20 a 11). Přesto byli naši žáci v porovnání s mezinárodním průměrem úspěšnější.

C

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	Katka 135, Barbora 130, Zuzana 120 (uznávejte také čas uvedený v hodinách a minutách).
	<b>Nesprávná odpověď</b>
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	10	79	99
Četnost [%]	39,2	40,6	20,2

Obsahově stejná úloha jako úloha v části B. Z porovnání úspěšnosti řešení úloh v části B a C lze usuzovat, že některým žákům činilo problém vyjádřit 4/3 hodiny v minutách.

D

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
20	250, 245, 255 – zvítězila Barbora (uznávejte také časy uvedené v hodinách a minutách).
21	Všechny tři údaje v tabulce jsou v souladu s výsledky v A, B a C. Vítězka má nejkratší čas.
	<b>Částečně správná odpověď</b>
10	Všechny tři údaje v tabulce jsou správné, ale vítěz není uveden nebo zvítězila Zuzana (nejvíce).
11	Jeden ze tří údajů v tabulce je nesprávný, ale vítězka je uvedena v souladu s tabulkou.
	<b>Nesprávná odpověď</b>
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků						
Kód odpovědi	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>79</b>	<b>99</b>
Četnost [%]	15,9	34,7	3,5	5,2	16,7	24,0

Jednoduchá slovní úloha, při jejímž řešení bylo třeba využít výsledků z předcházejících částí úlohy a správně interpretovat výsledek – vítězem je ten, kdo dosáhl nejkratšího času.

### Úloha M6 (M07-01)

Na výletě bylo více než 55, ale méně než 65 dětí. Děti mohly být rozděleny do skupin po 7, ale ne do skupin po 8. Kolik dětí bylo na výletě?

Obsah: přirozená čísla

Cíl úlohy: určování násobků a dělitelů čísel, odečítání hodnot ze stupnic a rozpoznávání prvočísel

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	52,5	53,7	51,5
Mezinárodní průměr	37,1	37,5	36,7

Hodnocení

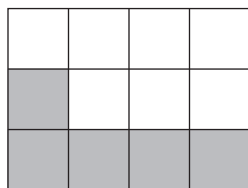
Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
<b>10</b>	63; $9 \cdot 7$ ; nebo $7 \cdot 9$
	<b>Nesprávná odpověď</b>
<b>70</b>	56; $8 \cdot 7$ ; nebo $7 \cdot 8$
<b>79</b>	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
<b>99</b>	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	<b>10</b>	<b>70</b>	<b>79</b>	<b>99</b>
Četnost [%]	52,5	17,9	20,0	9,6

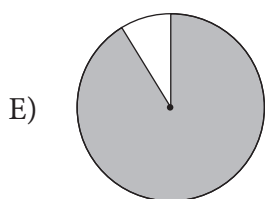
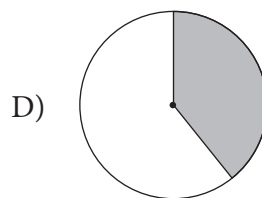
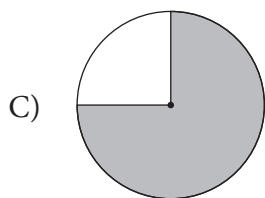
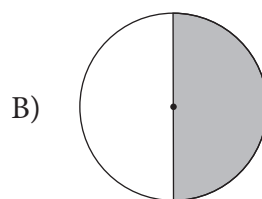
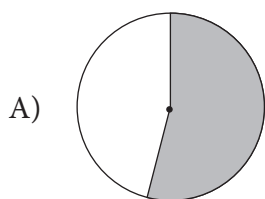
Předpokladem pro vyřešení slovní úlohy je její správná matematizace – úkolem je najít násobek sedmi, který leží mezi dvěma danými čísly a zároveň není násobkem osmi. Téměř pětina žáků splnila pouze jednu z těchto podmínek.

## 1.2 ZLOMKY A DESETINNÁ ČÍSLA

### Úloha M7 (M01-01)



Na kterém kruhu je vybarvením jeho části znázorněn přibližně stejný zlomek jako na obdélníku nahoře?



Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: vyjadřování desetinných čísel, zlomků a operací s nimi pomocí modelů, chápání a užívání těchto vyjádření

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	78,1	77,9	78,4
Česká republika 2007	74,2	71,8	76,3
Mezinárodní průměr	62,5	61,5	63,5

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků					
Odpověď	A	B	C	D	E
Četnost	13,1	2,6	4,1	74,2	4,4

Cílem úlohy je identifikovat kruhový model, na kterém je znázorněn tentýž zlomek jako na obdélníkovém modelu. K nalezení správné odpovědi postačí určit, že na obdélníkovém modelu je znázorněn zlomek  $5/12$ , tj. zlomek menší než  $1/2$ . Zlomek menší než  $1/2$  je znázorněn na jediném kruhovém modelu – D. K identifikaci správného kruhového modelu může dospět žák i v případě, že kruhový model bude považovat za hodiny. Pak zlomek  $5/12$  odpovídá pěti hodinám, resp. 25 minutám. Úloha měla relativně vysoké procento úspěšnosti a čeští žáci o více než 10 % překonali mezinárodní průměr.

### Úloha M8 (M01-02)

Zahradník smíchá 4,45 kg travního semene s 2,735 kg jetelového semene. Kolik kilogramů směsi získá?

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: řešení úloh výpočtem, odhadem a s využitím zaokrouhlování

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	77,7	76,6	79,1
Česká republika 2007	79,2	82,1	76,7
Mezinárodní průměr	56,6	60,3	52,9

Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	7,185 (kg)
19	Jiné odpovědi ekvivalentní 7,185 (kg).
	<b>Nesprávná odpověď</b>
70	6,780 (kg) nebo 6,78 (kg) [4,045 + 2,735]
71	Obsahuje jednu chybně vypočtenou číslici (např. 7,085; 7,195; 8,185 a podobně).
72	Jedno z čísel: 3,18; 31,8; 318, nebo 3 180 [špatné přiřazení řádů]
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědi nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků							
Kód odpovědi	10	19	70	71	72	79	99
Četnost [%]	79,1	0,1	2,8	3,4	0,2	11,0	3,4

Jednoduchá slovní úloha, jejíž řešení vyžaduje zvolení správné početní operace (sčítání) a zvládnutí sčítání dvou desetinných čísel s různým počtem desetinných míst. V úspěšnosti řešení čeští žáci statisticky významně (o více než 20 %) překonali mezinárodní průměr.

### Úloha M9 (M01-09)

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} =$$

A)  $\frac{16}{17}$

B)  $\frac{41}{40}$

C)  $\frac{81}{40}$

D)  $\frac{111}{40}$

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: počítání se zlomky a desetinnými čísly

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	80,9	81,7	79,9
Česká republika 2007	64,7	70,0	60,0
Mezinárodní průměr	43,6	46,9	40,4

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	22,6	3,6	5,2	64,7

Úloha ověřuje, zda žáci umí sečíst tři zlomky s různými jmenovateli. V řešení této úlohy byli čeští žáci velmi úspěšní a překonali mezinárodní průměr, přičemž vyšší úspěšnosti řešení dosáhly dívky. Oproti roku 1999 se však čeští žáci výrazně zhoršili.



### Úloha M10 (M01-10)

Katka zapisovala do tabulky, za jak dlouho se ochladí voda v kádince z 95 °C na 70 °C. Měřila čas, za jak dlouho se ochladí voda vždy o 5 °C.

Interval teplot	Doba ochlazování
95 °C – 90 °C	2 minuty 10 sekund
90 °C – 85 °C	3 minuty 19 sekund
85 °C – 80 °C	4 minuty 48 sekund
80 °C – 75 °C	6 minut 55 sekund
75 °C – 70 °C	9 minut 43 sekund

Odhadni na celé minuty, jak dlouho trvalo ochlazování vody z 95 °C na 70 °C, a vysvětli, jak jsi k výsledku došel(la).

Odhad:

Vysvětlení:

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: řešení úloh výpočtem, odhadem a s využitím zaokrouhlování

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 5

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	15,1	14,5	15,8
Česká republika 2007	12,0	12,9	11,3
Mezinárodní průměr	8,7	8,6	8,7

Hodnocení

**Poznámka:** Není rozdíl mezi odpověďmi s jednotkami nebo bez nich.

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
20	27 minut, každý čas je před sčítáním správně zaokrouhlen na celé minuty (tj. 2 + 3 + 5 + 7 + 10).
21	27 minut, každý čas je správně zaokrouhlen na nejbližší násobek 5, 10, 15 nebo 30 sekund.
22	27 minut, součet minut je 24 a použit odhad sekund na 3 minuty.
23	27 minut, sečteny správně časy a potom zaokrouhleno z 26 minut 55 sekund.
24	27 minut. Bez uvedení výpočtu. Může být uvedeno „zaokrouhleno na minuty“, „čísla zaokrouhlená nahoru a dolů“ nebo podobně.
29	Jiná úplně správná.

Částečně správná odpověď	
10	Postup obsahuje správné zaokrouhlení každého času na celé minuty před sčítáním, ale výsledek je špatný.
11	Postup obsahuje správné zaokrouhlení každého času na nejbližší násobek 5, 10, 15 nebo 30 sekund, ale výsledek je špatný.
19	Jiná částečně správná včetně 27 minut bez vysvětlení nebo postupu výpočtu.
Nesprávná odpověď	
70	Každý čas je zaokrouhlen, ale jedno nebo více zaokrouhlení je špatně.
71	26 minut 55 sekund bez zaokrouhlení.
72	25 minut 75 sekund; 25,75 minut nebo zaokrouhlení z 25,75 minut (nebo ekvivalentní).
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
Bez odpovědi	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků														
Kód odpovědi	20	21	22	23	24	29	10	11	19	70	71	72	79	99
Četnost [%]	0,2	0,0	2,3	2,6	4,5	2,5	0,0	0,0	7,2	0,2	7,0	4,8	53,4	15,4

Slovní úloha, u které je vyžadován nejen vlastní výsledek, ale i zaznamenání postupu výpočtu. Kromě správné matematizace reálné situace a provedení vlastního výpočtu má žák tedy prokázat i schopnost zaznamenat postup výpočtu tak, aby byl srozumitelný pro další osobu. Za správný byl považován jak postup, kdy žáci údaje nejprve sečetli a následně zaokrouhlili, tak postup obrácený, kdy údaje nejprve zaokrouhlili a pak sečetli. Úloha měla velmi nízké procento úspěšnosti jak v mezinárodním měřítku, tak v České republice. Zásadním problémem úlohy byla její správná matematizace – část žáků chápala uvedené časové údaje jako začátek, resp. konec procesu ochlazování a od posledního časového údaje odčítala první (9 minut 43 sekund – 2 minuty 10 sekund).

### Úloha M11 (M02-02)

Kolik je  $3,4 \cdot 10^2$ ?

- A) 3,4
- B) 34
- C) 340
- D) 3 400

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: porozumění řádům desetinných čísel

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 1

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	86,3	87,6	85,2
Mezinárodní průměr	67,4	67,9	66,9

Hodnocení

**Správná odpověď: C**

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	0,2	4,3	86,3	8,9

Při řešení úlohy žáci prokazují, že umí vynásobit desetinné číslo mocninou deseti (v tomto případě druhou mocninou deseti). V úspěšnosti řešení čeští žáci výrazně překonali mezinárodní průměr.

### Úloha M12 (M03-03)

Které z následujících čísel je NEJMENŠÍ?

- A)  $\frac{1}{2}$
- B)  $\frac{5}{8}$
- C)  $\frac{5}{6}$
- D)  $\frac{5}{12}$

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: porovnávání a uspořádání zlomků a desetinných čísel

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	74,6	70,7	78,2
Česká republika 2007	66,3	63,4	69,0
Mezinárodní průměr	57,5	55,6	59,4

Hodnocení

**Správná odpověď: D**

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	22,9	1,8	7,2	66,3

V úloze mají žáci prokázat schopnost aplikovat poznatky o porovnávání zlomků. K nalezení správného řešení lze dospět dvěma způsoby: Všechny čtyři zlomky rozšířit tak, aby měly společného jmenovatele, a porovnat jejich čitatele. Druhý způsob využívá porovnání tří zlomků se stejným čitatelem (zlomky B, C a D) – z nich nejmenší je zlomek s největším jmenovatelem, tj.  $5/12$ . Protože  $5/12 < 6/12 = 1/2$ , je zlomek  $5/12$  nejmenším z uvedených zlomků. Z nesprávných odpovědí měla největší četnost odpověď A, tj. zlomek s nejmenším čitatelem. Je otázkou, nakolik je četnost této odpovědi ovlivněna tím, že všechny tři zbývající zlomky měly stejného čitatele 5. Čeští žáci se od roku 1999 v řešení úlohy zhoršili.

### Úloha M13 (M03-07)

Vynásob:  $0,402 \cdot 0,53 =$

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: počítání se zlomky a desetinnými čísly

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 1

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	63,6	64,7	62,7
Česká republika 2007	80,6	84,5	76,8
Mezinárodní průměr	58,7	61,3	56,0

Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	0,21306
11	0,21306 je uvedeno v postupu a potom zaokrouhluje (správně nebo nesprávně).
	<b>Nesprávná odpověď</b>
70	2,1306; 21,306; 21306; 0,021306 nebo jiné číslo, ve kterém je chybně umístěna desetinná čárka.
71	0,213 nebo 0,21 nebo jiný zaokrouhlený výsledek, ale není uvedeno 0,21306.
72	0,03216; 0,3216; 3,216 nebo jiné číslo, ve kterém došlo při násobení k záměně pořadí číslic.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).

<b>Bez odpovědi</b>	
<b>99</b>	Prázdné

Odpovědi českých žáků							
Kód odpovědi	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>70</b>	<b>71</b>	<b>72</b>	<b>79</b>	<b>99</b>
Četnost [%]	79,8	0,8	2,7	3,5	0,1	10,7	2,5

Úloha ověřuje, zda žák umí vynásobit dvě desetinná čísla. Úloha měla vysokou úspěšnost řešení, čeští žáci výrazně překonali mezinárodní průměr a také výsledek svých vrstevníků z roku 1999. Otázkou zůstává, nakolik byl výsledek ovlivněn skutečností, že žáci mohli používat kalkulačku.

### Úloha M14 (M03-09)

Lístky na koncert stojí 10 zedů, 15 zedů a 30 zedů.  
 Z 900 prodaných lístků byla  $\frac{1}{5}$  lístků po 30 zedech a  $\frac{2}{3}$  po 15 zedech.  
 Vyjádři ZLOMKEM, jaká část prodaných lístků byla po 10 zedech.

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: řešení úloh výpočtem, odhadem a s využitím zaokrouhlování

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 2007	21,9	26,0	18,0
Mezinárodní průměr	18,4	18,4	18,3

Hodnocení

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
<b>10</b>	$\frac{2}{15}$ nebo ekvivalentní
<b>Nesprávná odpověď</b>	
<b>79</b>	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
<b>99</b>	Prázdné

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	10	79	99
Četnost [%]	21,9	45,7	32,4

Složená slovní úloha s nadbytečným údajem, která ověřuje, zda žáci umí sčítat, resp. odečítat zlomky s různými jmenovateli. Úloha měla relativně malou úspěšnost řešení. Bylo by zajímavé sledovat, kolik žáků nedokázalo vyjádřit celek jako 1 a ukončilo výpočet sečtením zlomků  $1/5 + 2/3$ . To však zvolený systém hodnocení neumožňuje.

### Úloha M15 (M03-10)

Dana peče brusinkový koláč z velké dávky, která je jeden a půlkrát větší, než uvádí původní recept.

Jestliže v původním receptu bylo zapotřebí  $\frac{3}{4}$  šálku cukru, kolik šálek cukru Dana pro svůj koláč potřebuje?

- A)  $\frac{3}{8}$
- B)  $1\frac{1}{8}$
- C)  $1\frac{1}{4}$
- D)  $1\frac{3}{8}$

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: řešení úloh výpočtem, odhadem a s využitím zaokrouhlování

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 2007	26,3	27,7	25,0
Mezinárodní průměr	27,4	26,4	28,4

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	15,9	26,3	25,5	22,6

Cílem úlohy je ověřit, zda žák umí násobit zlomky a vyjádřit smíšené číslo zlomkem, resp. obráceně. Přestože byl výsledek uveden ve tvaru zlomku, resp. smíšeného čísla, bylo možné v průběhu výpočtu násobení zlomků nahradit násobením desetinných čísel. Úloha měla poměrně malou úspěšnost řešení, přičemž četnost jednotlivých odpovědí byla velmi vyrovnaná.

### Úloha M16 (M07-02)

Který postup je správný, když chceš zjistit, kolik je  $\frac{1}{5} - \frac{1}{3}$  ?

A)  $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1-1}{5-3}$

B)  $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{5-3}$

C)  $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{5-3}{5 \cdot 3}$

D)  $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{5 \cdot 3}$

Obsah: zlomky a desetinná čísla

Cíl úlohy: počítání se zlomky a desetinnými čísly

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	37,5	42,8	32,8
Mezinárodní průměr	29,8	31,7	28,0

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	21,1	25,0	13,5	37,5

Cílem úlohy není odečíst dva zlomky, ale z daných možností identifikovat tu, která charakterizuje správný postup odčítání zlomků. Podmínkou pro vyřešení úlohy je tedy znalost pravidla (postupu) pro odčítání zlomků a jeho rozpoznání v konkrétním případě. Téměř polovina žáků neprokázala ani znalost určení společného jmenovatele zlomků.

### 1.3 CELÁ ČÍSLA

#### Úloha M17 (M02-03)

Do každého čtverečku napiš buď +, nebo – tak, aby výsledek byl co možná největší.

$$-5 \square -6 \square 3 \square -9$$

Obsah: celá čísla

Cíl úlohy: řešení úloh s celými čísly

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	49,1	49,9	48,4
Mezinárodní průměr	34,3	32,4	36,1

Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	–, +, –
	<b>Nesprávná odpověď</b>
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	10	79	99
Četnost [%]	49,1	47,4	3,5

Cílem úlohy je umístěním znamének + nebo – mezi čtyři celá čísla vytvořit výraz, který bude mít největší hodnotu. Žáci mohli řešit úlohu zkusmo – sestavit osm výrazů, vypočítat jejich hodnoty a vybrat výraz s největší hodnotou (počet vyšetřovaných možností je možné redukovat, budou-li se znaménka umísťovat postupně se současným vyčíslováním hodnot dvojčlenů). Nejeфекtivnější způsob řešení spočívá v aplikaci poznatku o odčítání záporných čísel. Za správně vyřešenou byla úloha považována pouze v případě, že byla správně umístěna všechna tři znaménka, v hodnocení se nepřipouštělo částečně správné řešení. V úspěšnosti řešení dosáhli čeští žáci statisticky lepšího výsledku, než byl mezinárodní průměr.



**Úloha M18 (M03-13)**

Které číslo po vydělení číslem  $-6$  dává výsledek  $12$ ?

- A)  $-72$
- B)  $-2$
- C)  $2$
- D)  $72$

Obsah: celá čísla

Cíl úlohy: vyjadřování, porovnávání a uspořádání celých čísel, počítání s nimi

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 2007	67,6	73,1	62,3
Mezinárodní průměr	51,4	52,4	50,4

Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	67,6	9,8	5,2	15,3

Úloha zjišťuje, zda žáci umí dělit záporným číslem. Při řešení úlohy (nalezení neznámého dělence) mohli žáci použít poznatku o vztahu mezi dělením a násobením (dělenec = dělitel  $\times$  podíl). Ke správnému výsledku lze ale dospět i bez tohoto poznatku – stačí pro každou z nabízených možností ověřit, zda po vydělení číslem  $-6$  dává výsledek  $12$ . Volba odpovědi B nebo C svědčí o neznalosti správného vztahu mezi dělením a násobením, volba odpovědi C nebo D o neznalosti „znaménkového“ pravidla při dělení záporným číslem.

## 1.4 POMĚR, ÚMĚRNOST A PROCENTA

### Úloha M19 (M01-06)

První rok prodala společnost 1 426 tun umělého hnojiva. Druhý rok prodala o 15 % hnojiva méně. Kolik tun umělého hnojiva přibližně prodala společnost druhý rok?

- A) 200 t
- B) 300 t
- C) 1 200 t
- D) 1 600 t
- E) 1 700 t

Obsah: poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	76,4	76,9	75,9
Česká republika 2007	73,1	65,9	79,6
Mezinárodní průměr	59,5	57,4	61,5

Hodnocení

**Správná odpověď:** C

Odpovědi českých žáků					
Odpověď	A	B	C	D	E
Četnost	10,3	7,1	73,1	4,3	1,4

Složená slovní úloha, která ověřuje schopnost matematizovat reálnou situaci s využitím procentového počtu. K řešení úlohy bylo možné použít dvě strategie. První spočívá v provedení (přesného) výpočtu a výběru nejbližší hodnoty z pěti možností. Druhá spočívá ve vyloučení nesprávných odpovědí. Například: možnosti D a E nemohou být správné – údaje jsou větší než 1 426 t, což odporuje textu, že druhý rok se prodalo méně než první; možnosti A a B také nemohou být správné – druhý rok se prodalo 85 %, tj. více než 1/2 z předcházejícího roku, tj. více než 713 t, avšak nabízené údaje jsou menší; správná tedy musí být odpověď C. V úspěšnosti řešení překonali čeští žáci mezinárodní průměr.

### Úloha M20 (M02-05)

Normálně stojí kabát 60 zedů. Alan si koupil kabát, když jeho cena byla snížena o 30 %. Kolik Alan ušetřil?

- A) 18 zedů
- B) 24 zedů
- C) 30 zedů
- D) 42 zedů

Obsah: poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	56,2	51,7	60,4
Mezinárodní průměr	43,3	43,0	43,6

Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	56,2	10,8	11,0	21,0

Jednoduchá slovní úloha, která ověřuje užití procentového počtu. V úspěšnosti řešení čeští žáci výrazně překonali mezinárodní průměr. Z nesprávných odpovědí měla u českých žáků největší četnost odpověď D (odpovídá ceně po slevě), v mezinárodním měřítku odpověď C (zřejmě záměna procent za měnu).

### Úloha M21 (M07-12)

V Zedlandu byla původní cena kabátu 120 zedů. Ve výprodeji stál kabát 84 zedů. O kolik procent byla cena kabátu snížena?

- A) o 25 %
- B) o 30 %
- C) o 35 %
- D) o 36 %

Obsah: poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	42,1	39,8	44,1
Mezinárodní průměr	29,3	26,9	31,7

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	15,7	42,1	11,0	25,7

Složená slovní úloha z oblasti procentového počtu, která ověřuje schopnost žáků matematizovat reálnou situaci (správně určit základ a procentovou část) a provést odpovídající výpočty. Protože rozdíly mezi nabízenými odpověďmi byly velmi malé, museli žáci úlohu aktivně řešit a nemohli použít metodu vyloučení nesprávných odpovědí, která u úloh s výběrem odpovědi často vede k výsledku. Naši žáci byli při řešení úlohy úspěšní a překonali mezinárodní průměr. Z nesprávných odpovědí měla největší četnost odpověď D, která číselně odpovídá velikosti slevy. V mezinárodním měřítku měla tato odpověď dokonce největší četnost ze všech nabízených možností.

**Úloha M22 (M02-04)**

Ve třídě je 30 žáků. Poměr počtu chlapců k počtu dívek je 2:3. Kolik je ve třídě chlapců?

- A) 6 chlapců
- B) 12 chlapců
- C) 18 chlapců
- D) 20 chlapců

Obsah: poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: dělení množství v daném poměru

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	60,3	61,1	59,7
Mezinárodní průměr	45,5	43,9	47,2

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	8,2	60,3	14,2	13,0

Jednoduchá slovní úloha, při jejímž řešení mají žáci prokázat, že rozumí pojmu poměr dvou veličin a umí určit hodnotu jedné veličiny, je-li dán jejich poměr a součet. V úspěšnosti řešení dosáhli čeští žáci statisticky lepšího výsledku, než byl mezinárodní průměr. Z nesprávných odpovědí měla největší četnost odpověď C (odpovídá převrácenému poměru 3:2) a dále pak odpověď D (odpovídá chybné úvaze, že chlapců jsou 2/3 z počtu žáků).

### Úloha M23 (M03-05)

V autobusu je 36 cestujících. Poměr počtu dětí k počtu dospělých je 5 ku 4.  
Kolik dětí je v autobusu?

Obsah: poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	38,2	35,7	40,4
Česká republika 2007	35,1	31,6	38,4
Mezinárodní průměr	26,5	25,5	27,6

Hodnocení

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	20
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	9 [5 + 4 nebo 36 : 4]
71	16 [počet dospělých]
72	5 [poměr dětí]
73	27 [36 – 9]
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků							
Kód odpovědi	10	70	71	72	73	79	99
Četnost [%]	35,1	6,6	7,3	0,2	2,4	26,9	21,5

Obsahově stejná úloha jako úloha M22, tentokrát s tvorbou odpovědi, nikoli s výběrem odpovědi. Z porovnání úspěšnosti řešení obou úloh lze usuzovat na závislost úspěšnosti řešení úlohy na způsobu jejího zadání.

### Úloha M24 (M07-03)

Slitina je vyrobena ze zlata a stříbra v poměru 1 gram zlata na 4 gramy stříbra. Kolik gramů stříbra je ve 40 gramech této slitiny?

- A) 8 gramů
- B) 10 gramů
- C) 30 gramů
- D) 32 gramů

Obsah: poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	26,9	20,9	32,1
Mezinárodní průměr	23,3	20,8	25,8

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	14,4	43,5	12,8	26,9

Obsahově stejná úloha jako úloha M22. Výsledky řešení úlohy potvrzují, že žáci opět nejčastěji chybovali v matematizaci reálné situace – nejčastější odpověď B odpovídá úvaze, že stříbro tvoří 1/4 hmotnosti slitiny.

### Úloha M25 (M03-11)

Na školním výletě připadal 1 učitel na 12 žáků. Když na výlet jelo 108 žáků, kolik učitelů bylo na výletě?

- A) 7 učitelů
- B) 8 učitelů
- C) 9 učitelů
- D) 10 učitelů

Obsah: poměr, úměrnost a procenta  
 Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti  
 Dovednost: používání znalostí  
 Obtížnost: úroveň 1

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 2007	92,6	93,2	92,1
Mezinárodní průměr	78,5	78,8	78,4

Hodnocení

**Správná odpověď:** C

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	1,3	3,5	92,6	1,8

Velmi jednoduchá slovní úloha, v níž mají žáci prokázat schopnost určit typ závislosti dvou veličin (přímá úměrnost). K vlastnímu výpočtu mohli žáci použít několik metod řešení – dělení (zde dělení po částech), trojčlenku nebo úměru.

### Úloha M26 (M03-12)

Autobus jede stále stejnou rychlostí, takže ujetá vzdálenost je přímo úměrná době jízdy. Když za 5 hodin autobus ujede 120 km, kolik kilometrů ujede za 8 hodin?

- A) 168 km
- B) 192 km
- C) 200 km
- D) 245 km

Obsah: poměr, úměrnost a procenta  
 Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti  
 Dovednost: používání znalostí  
 Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 2007	80,4	80,6	80,1
Mezinárodní průměr	59,5	59,1	60,0

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	5,8	80,4	8,8	2,5

Obsahově stejná úloha jako úloha M25, avšak vyšší obtížnosti, která se projevila i na poklesu úspěšnosti řešení. Úspěšnost českých žáků je výrazně nad mezinárodním průměrem.

### Úloha M27 (M05-01)

Třída	Chlapci	Dívky
1	12	9
2	14	11
3	16	12
4	18	15

V tabulce je uveden počet chlapců a dívek ve čtyřech třídách. Ve kterých dvou třídách je poměr počtu chlapců k počtu dívek stejný?

- A) v 1. a 2.
- B) v 1. a 3.
- C) v 2. a 3.
- D) v 2. a 4.

Obsah: poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: rozpoznávání a nacházení ekvivalentních poměrů, vyjadřování poměrů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	50,9	50,5	51,3
Mezinárodní průměr	49,6	50,1	49,1

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	10,3	50,9	13,2	13,5

V úloze mají žáci prokázat, že umí porovnat dvě veličiny poměrem a že umí rozhodnout, které dva poměry jsou ekvivalentní. K rozhodnutí o ekvivalentnosti poměrů mohou poměry upravit do základního tvaru, nebo je vyjádřit pomocí zlomků a ty porovnat, případně vyjádřit poměr pomocí čísla (provést naznačené dělení).





## 2 ALGEBRA

V rámci oblasti učiva *algebra* je prvořadý důraz kladen na funkční vztahy a jejich využívání k modelování a řešení úloh. Dále do ní patří rozvíjení číselných řad, užívání algebraických symbolů, ale i hodnocení výpočetní zručnosti žáků. Žáci 8. ročníku by již měli dobře chápat lineární vztahy a pojem proměnné. Očekává se od nich používání a zjednodušování algebraických výrazů, řešení lineárních rovnic, nerovnic, soustav dvou rovnic o dvou neznámých a užívání funkcí.

Součástí oblasti učiva *algebra* jsou tři tematické celky: řady a posloupnosti; algebraické výrazy; rovnice, vzorce a funkce.

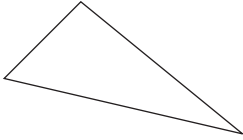
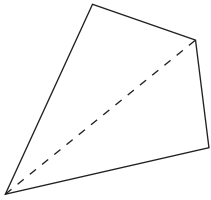
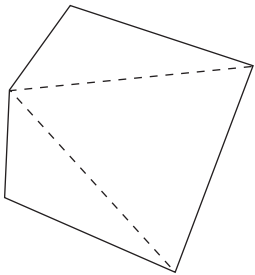
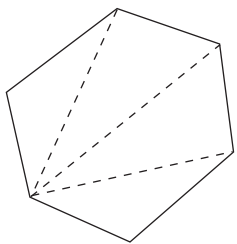
### 2.1 ŘADY A POSLOUPNOSTI

#### Úloha M28 (M02-07)

##### Vnitřní úhly

Jarda zkoumal vlastnosti mnohoúhelníků. Vypracoval tabulku, aby zjistil, zda je možné najít vztah mezi stranami a úhly.

A. Doplň prázdná políčka v tabulce.

Mnohoúhelník	Počet stran	Počet trojúhelníků	Součet velikostí vnitřních úhlů
	3	1	$1 \cdot 180^\circ$
	—	—	— $\cdot 180^\circ$
	—	—	— $\cdot 180^\circ$
	—	—	— $\cdot 180^\circ$

B. Do čtverečku napiš správné číslo.

Součet velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku s 10 stranami =  · 180°

C. Jarda vztah objevil a pomocí  $n$  dokázal napsat vzorec, který je pravdivý pro jakýkoliv mnohoúhelník. Doplň, co napsal.

Součet velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku s  $n$  stranami = \_\_\_\_\_ · 180°

Obsah: řady a posloupnosti

Cíl úlohy: A rozvíjení číselných, algebraických a geometrických řad či posloupností pomocí čísel, slov, symbolů nebo diagramů, hledání chybějících členů

B rozvíjení číselných, algebraických a geometrických řad či posloupností pomocí čísel, slov, symbolů nebo diagramů, hledání chybějících členů

C zobecňování vztahů uvnitř posloupnosti, mezi sousedními členy nebo mezi členem a jeho pořadovým číslem pomocí čísel, slov nebo algebraických výrazů

Dovednost: A prokazování znalostí

B uvažování

C uvažování

Obtížnost: A úroveň 3

B úroveň 4

C úroveň 4

A

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	54,0	54,5	53,6
Mezinárodní průměr	47,4	50,3	44,5

B

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	23,4	23,6	23,2
Mezinárodní průměr	27,6	28,1	26,9

C

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	6,4	7,0	5,8
Mezinárodní průměr	15,7	16,5	14,8

## Hodnocení

A

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	Všechny údaje správně: 4 2 2 5 3 3 6 4 4
<b>Nesprávná odpověď</b>	
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdne

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	10	79	99
Četnost [%]	54,0	40,8	5,1

V úloze mají žáci najít vztah (závislost) mezi počtem stran mnohoúhelníku a součtem velikostí jeho vnitřních úhlů ve čtyřech konkrétních případech. Nalezení vztahu je založeno na dělení mnohoúhelníku na nepřekrývající se trojúhelníky. Ke správnému vyřešení úlohy stačilo z obrázku správně určit počet stran mnohoúhelníku a počet nepřekrývajících se trojúhelníků, který figuruje zároveň jako činitel ve třetím sloupečku vyplňované tabulky. Za správně vyřešenou byla úloha považována pouze v případě, že v tabulce bylo správně vyplněno všech devět čísel, v hodnocení se nesledovalo částečné správné řešení. Úspěšnost řešení úlohy byla poměrně vysoká, u českých žáků překročila 50 %.

B

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	8
<b>Nesprávná odpověď</b>	
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdne

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	10	79	99
Četnost [%]	23,4	57,1	19,5

V úloze měli žáci prokázat schopnost rozpoznat pravidlo pro výpočet součtu velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku z předcházející části úlohy a použít ho v jednom konkrétním případě. Žáci mají prokázat schopnost této úvahy: mnohoúhelník s 10 stranami lze rozdělit na osm nepřekrývajících se trojúhelníků (počet trojúhelníků je o 2 menší než počet stran mnohoúhelníku), součet velikostí jeho vnitřních úhlů je tedy  $8 \cdot 180^\circ$ . Úlohu lze samozřejmě vyřešit i pomocí obrázku za použití postupu aplikovaného v části A. Výsledky řešení naznačují, že úloha je pro většinu žáků velmi obtížná.

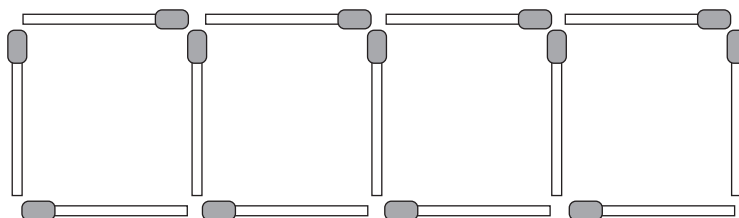
C

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	$n - 2$ se závorkami nebo bez nich.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	$n$ nebo ekvivalentní slovní vyjádření.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	6,4	20,3	37,8	35,5

V této části úlohy měli žáci zobecnit pravidlo pro výpočet součtu velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku z části A, resp. B a pomocí proměnné vyjádřit závislost mezi počtem stran a součtem velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku. Úloha měla velmi malé procento úspěšnosti řešení. Z výsledků částí B a C se dá usuzovat na to, že většina žáků nebyla schopna provést zobecnění z části A, resp. že nebyla schopna zapsat pomocí proměnné. Úspěšnost českých žáků byla výrazně nižší než mezinárodní průměr.

### Úloha M29 (M05-03)



Ze 13 zápalek byly složeny 4 čtverce v řadě, které jsou na obrázku. Kolik čtverců v řadě můžeme složit stejným způsobem ze 73 zápalek? Napiš výpočet, jak jsi dospěl ke své odpovědi.

Obsah: řady a posloupnosti

Cíl úlohy: rozvíjení číselných, algebraických a geometrických řad či posloupností pomocí čísel, slov, symbolů nebo diagramů, hledání chybějících členů

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	8,8	8,6	9,1
Mezinárodní průměr	8,7	8,5	8,9

Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
20	24 s výpočtem.
	<b>Částečně správná odpověď</b>
10	24 bez výpočtu, nebo výpočet neodpovídá (včetně pouhého nákresu a spočítání čtverců).
	<b>Nesprávná odpověď</b>
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	20	10	79	99
Četnost [%]	8,8	11,7	57,9	21,5

V úloze se očekává, že žáci objeví pravidlo, které popisuje závislost mezi dvěma veličinami – počtem čtverců a počtem zápalek. K určení počtu čtverců mohou použít např. tabulku. Z ní se dá poznat, že počet zápalek se zvětšuje o 3. Postupným doplňováním hodnot do tabulky se zjistí požadovaný výsledek.

Počet čtverců	1	2	3	4	5	...
Počet zápalek	4	7	10	13	16	...

Pokud si žáci z obrázku, resp. z tabulky uvědomí, že k sestavení prvního čtverce jsou potřeba 4 zápalky a k sestavení každého dalšího 3 zápalky, mohou počet zápalek potřebných k sestavení  $n$  čtverců vyjádřit pomocí výrazu  $4 + 3(n - 1)$ . Počet čtverců sestavených ze 73 zápalek je pak kořenem rovnice  $4 + 3(n - 1) = 73$ . K nalezení správného řešení mohli žáci samozřejmě použít grafickou metodu, tj. pokračovat v kreslení řady čtverců až do vyčerpání 73 zápalek. Tento způsob řešení však byl hodnocen jako pouze částečně správný, v zadání úlohy se požadovalo provést výpočet. S řešením tohoto typu úloh (číselné posloupnosti) mají žáci základní školy velmi malé zkušenosti, což se projevilo i na úspěšnosti řešení úlohy, která zpravidla nepřekročila 10%. Mezinárodní průměr úspěšnosti velmi výrazně překonali pouze žáci Korejské republiky, Japonska a Singapur (úspěšnost řešení 40–60%).

**Úloha M30 (M07-04)**

2, 5, 11, 23, ...

Řada začíná číslem 2. Které z následujících pravidel použiješ při výpočtu dalších členů číselné řady nahore?

- A) K předchozímu členu přičti 1 a potom vynásob číslem 2.
- B) Předchozí člen vynásob číslem 2 a potom přičti 1.
- C) Předchozí člen vynásob číslem 3 a potom odečti 1.
- D) Od předchozího členu odečti 1 a potom vynásob číslem 3.

Obsah: řady a posloupnosti

Cíl úlohy: zobecňování vztahů uvnitř posloupnosti, mezi sousedními členy nebo mezi členem a jeho pořadovým číslem pomocí čísel, slov nebo algebraických výrazů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	80,5	82,4	78,8
Mezinárodní průměr	63,0	64,4	61,5

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	4,5	80,5	7,5	2,5

Podstatou úlohy je identifikovat pravidlo, podle kterého je tvořena číselná řada, tj. najít odpovídající funkční vztah mezi členy řady. Úkolem žáků není pravidlo „objevit“, ale z nabídky čtyř slovy popsaných pravidel vybrat správné. Platnost pravidla je potřeba ověřit na všech daných členech posloupnosti.

## 2.2 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

### Úloha M31 (M04-03)

$a = 3, b = -1.$   
 Kolik je  $2a + 3(2 - b)$  ?  
 A) 15  
 B) 14  
 C) 13  
 D) 9

Obsah: algebraické výrazy

Cíl úlohy: dosazování čísel do výrazů a výpočet výsledné hodnoty

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	33,8	41,1	26,6
Mezinárodní průměr	34,2	36,5	31,9

Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	33,8	5,8	10,4	44,6

V úloze žáci prokazují, že umí dosadit za proměnné do algebraického výrazu, umí provést početní operace ve správném pořadí a umí počítat se zápornými čísly. Úloha neměla příliš vysoké procento úspěšnosti a čeští žáci se nelišili od mezinárodního průměru. V řešení úlohy byly úspěšnější dívky, přičemž rozdíl v úspěšnosti řešení mezi českými dívkami a chlapci je značný. Z nesprávných odpovědí měla nejvyšší četnost odpověď D, žáci chybně dosadili záporné číslo.

### Úloha M32 (M05-02)

$2a^2 \cdot 3a =$   
 A)  $5a^2$   
 B)  $5a^3$   
 C)  $6a^2$   
 D)  $6a^3$

Obsah: algebraické výrazy

Cíl úlohy: určování součtů, součinů a mocnin výrazů obsahujících proměnné

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 3



Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	69,3	72,5	65,9
Mezinárodní průměr	46,6	49,2	44,0

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
Četnost [%]	3,9	9,8	14,9	69,3

Úprava algebraického výrazu ověřuje znalost násobení mocnin se stejným základem. Čeští žáci byli při řešení úlohy velmi úspěšní a výrazně překonali mezinárodní průměr.

### Úloha M33 (M02-06)

Který výraz se rovná výrazu  $4x - x + 7y - 2y$  ?

- A) 9
- B)  $9xy$
- C)  $4 + 5y$
- D)  $3x + 5y$

Obsah: algebraické výrazy

Cíl úlohy: zjednodušování nebo porovnávání algebraických výrazů a zjišťování, zda jsou ekvivalentní

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	75,8	78,7	73,2
Mezinárodní průměr	60,0	62,4	57,6

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
Četnost [%]	1,7	6,8	13,2	75,8

V úloze měli žáci identifikovat výraz, který je zjednodušením algebraického čtyřčlenu. Úloha měla vysokou úspěšnost řešení, čeští žáci výrazně překonali mezinárodní průměr.

## Úloha M34 (M04-07)

Který výraz se rovná výrazu  $2(x + y) - (2x - y)$  ?

- A)  $3y$
- B)  $y$
- C)  $4x + 3y$
- D)  $4x + 2y$

Obsah: algebraické výrazy

Cíl úlohy: zjednodušování nebo porovnávání algebraických výrazů a zjišťování, zda jsou ekvivalentní

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	24,7	26,9	22,6
Mezinárodní průměr	25,8	26,7	24,9

Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	24,7	26,2	13,2	29,7

Při zjednodušování algebraického výrazu musí žáci použít znalosti o násobení dvojčlenu číslem a o odčítání dvojčlenu. Správnou odpověď zvolila pouze čtvrtina žáků.

## Úloha M35 (M04-04)



První trubka je dlouhá  $x$  metrů. Druhá trubka je  $y$ -krát delší než první.

Jak dlouhá je druhá trubka?

- A)  $xy$  metrů
- B)  $x + y$  metrů
- C)  $\frac{x}{y}$  metrů
- D)  $\frac{y}{x}$  metrů

Obsah: algebraické výrazy

Cíl úlohy: modelování situací pomocí algebraických výrazů

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	57,1	62,4	51,9
Mezinárodní průměr	47,9	50,6	45,3

Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	57,1	20,7	5,9	11,5

V úloze mají žáci prokázat, že umí pomocí algebraického výrazu zapsat verbálně popsané vyjádření jedné veličiny pomocí druhé. Kromě schopnosti práce s proměnnými musí žáci při řešení prokázat, že správně chápou vyjádření  $n$ -krát více (méně). V řešení úlohy byly dívky úspěšnější než chlapci.

### Úloha M36 (M07-06)

Halina má o 3 bundy více než Anna. Jestliže počet bund Haliny označíme  $n$ , vyjádři pomocí  $n$ , kolik bund má Anna.

- A)  $n - 3$
- B)  $n + 3$
- C)  $3 - n$
- D)  $3n$

Obsah: algebraické výrazy

Cíl úlohy: modelování situací pomocí algebraických výrazů

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	55,8	49,8	60,9
Mezinárodní průměr	40,8	40,7	40,9

Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	55,8	28,6	5,9	7,8

V úloze mají žáci prokázat, že dokážou slovně popsanou závislost mezi dvěma veličinami zapsat pomocí proměnné. Úloha zároveň testuje, zda žáci čtou s porozuměním celý její text. Ti, kteří chybovali a zvolili odpověď B, si automaticky spojili formulaci „o 3 více“ s přičítáním čísla 3 a nevzali do úvahy informaci obsaženou dále v textu o tom, která z veličin je označena proměnnou a kterou mají vypočítat.

## 2.3 ROVNICE, VZORCE A FUNKCE

### Úloha M37 (M07-05)

$$3(2x - 1) + 2x = 21$$

Kolik je hodnota  $x$  ?

A)  $-3$

B)  $-\frac{11}{4}$

C)  $\frac{11}{4}$

D)  $3$

Obsah: rovnice, vzorce a funkce

Cíl úlohy: řešení jednoduchých lineárních rovnic, nerovnic a soustav dvou rovnic o dvou neznámých

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	69,1	69,4	68,8
Mezinárodní průměr	57,6	59,5	55,6

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	8,3	1,6	13,5	69,1

Úlohu lze řešit dvěma způsoby – dosazením za  $x$  ověřit, které z čísel je kořenem rovnice, nebo rovnici aktivně vyřešit. Při řešení úlohy byli čeští žáci poměrně úspěšní a výrazně překročili mezinárodní průměr.

### Úloha M38 (M01-04)

Ekvivalentní úpravou nerovnice  $\frac{x}{3} > 8$  získáme nerovnici

A)  $x < 5$

B)  $x < 24$

C)  $x > \frac{8}{3}$

D)  $x > 5$

E)  $x > 24$

Obsah: rovnice, vzorce a funkce

Cíl úlohy: řešení jednoduchých lineárních rovnic, nerovnic a soustav dvou rovnic o dvou neznámých

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	34,4	33,7	35,3
Česká republika 2007	29,4	29,3	29,5
Mezinárodní průměr	31,4	32,5	30,4

Hodnocení

**Správná odpověď:** E

Odpovědi českých žáků					
Odpověď	A	B	C	D	E
Četnost	1,8	22,0	30,3	3,9	29,4

Cílem úlohy je vyřešit jednoduchou lineární nerovnici s neznámou v čitateli zlomku. K nalezení správného řešení postačila jedna ekvivalentní úprava – vynásobení obou stran nerovnice kladným číslem (třemi). Úloha měla poměrně malou úspěšnost řešení, což může souviset s tím, že 14letí žáci se ve výuce matematiky s řešením lineárních nerovnic standardně nesetkávají. Vysoká četnost nesprávné odpovědi C by spolu s textem navádějícím k použití ekvivalentní úpravy (tento pojem žáci znají z řešení rovnic) mohla svědčit i o nesprávném chápání pojmu ekvivalentní úprava.

### Úloha M39 (M02-08)

Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napiš postup výpočtu.

Obsah: rovnice, vzorce a funkce

Cíl úlohy: řešení úloh pomocí rovnic, vzorců a funkcí

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	24,6	25,6	23,7
Mezinárodní průměr	17,8	18,3	17,3

Hodnocení

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	10 zedů a uvedeny rovnice. Rovnice by měly obsahovat písmena jako proměnné, např. $2y + 3x = 17$ .
11	10 zedů a uveden jiný postup, např. pero = tužka + 1.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	10 zedů bez uvedení postupu.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	10	11	70	79	99
Četnost [%]	6,4	18,2	3,6	42,6	29,2

Složená slovní úloha, v níž mají žáci prokázat schopnost matematizace reálné situace pomocí rovnice s jednou neznámou, případně pomocí soustavy rovnic se dvěma neznámými. Řešení úlohy probíhá ve dvou krocích – výpočet ceny pera, resp. tužky a výpočet ceny za 1 pero a 2 tužky. Poměrně malé procento úspěšnosti řešení může souviset s tím, že žáci ukončili řešení vyřešením rovnice (tj. výpočtem ceny pera, resp. tužky) a neprovedli druhý krok výpočtu. Ověření této domněnky však zvolený způsob hodnocení neumožňuje.

**Úloha M40 (M04-06)**

Celkový poplatek za přepravu zásilky v Zedlandu se vypočítá pomocí rovnice  $y = 4x + 30$ , kde  $x$  je hmotnost zásilky v gramech a  $y$  je cena v zedech. Kolik gramů si můžeš nechat přepravit, když máš 150 zedů?

- A) 630 g
- B) 150 g
- C) 120 g
- D) 30 g

Obsah: rovnice, vzorce a funkce

Cíl úlohy: řešení úloh pomocí rovnic, vzorců a funkcí

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	38,8	45,5	32,2
Mezinárodní průměr	33,9	37,1	30,7

Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	10,1	13,7	22,8	38,8

Úloha ověřuje, zda žáci umí správně dosadit do rovnice lineární závislosti dvou veličin a zda umí vyřešit lineární rovnici s jednou neznámou.

**Úloha M41 (M04-08)**Který bod leží na přímce  $y = x + 2$  ?

- A)  $[0, -2]$
- B)  $[2, -4]$
- C)  $[4, 6]$
- D)  $[6, 4]$

Obsah: rovnice, vzorce a funkce

Cíl úlohy: ověřování, zda určité hodnoty vyhovují dané rovnici či vzorci

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	24,5	26,7	22,3
Mezinárodní průměr	30,0	28,9	31,3

Hodnocení

**Správná odpověď:** C

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	25,7	19,9	24,5	7,7

Nalezení řešení předpokládá správné dosazení do rovnice se dvěma neznámými. Více než třetina žáků dosadila do rovnice chybně (zaměnila hodnoty  $x$  a  $y$ ). Ve srovnání s mezinárodním průměrem třikrát více našich žáků úlohu vůbec neřešilo. To pravděpodobně souvisí s tím, že toto téma u nás bývá často zařazováno až do 9. ročníku základní školy.



## Úloha M42 (M05-10)

Tabulka zachycuje vztah mezi  $x$  a  $y$ .

$x$	1	2	3	4	5
$y$	1	3	5	7	9

Která z následujících rovnic vyjadřuje tento vztah?

- A)  $y = x + 4$
- B)  $y = x + 1$
- C)  $y = 2x - 1$
- D)  $y = 3x - 2$

Obsah: rovnice, vzorce a funkce

Cíl úlohy: rozpoznávání a vytváření ekvivalentních vyjádření funkcí prezentovaných formou uspořádaných dvojic, tabulek, grafů nebo slovně

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	32,4	31,5	33,2
Mezinárodní průměr	38,4	38,1	38,7

Hodnocení

**Správná odpověď:** C

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	12,8	24,9	32,4	11,1

V úloze žáci prokazují schopnost rozhodnout, které z daných rovnic lineární funkce vyhovují uspořádané dvojice čísel uvedené v tabulce. Nalezení rovnice vyžaduje ověřit rovnost správným dosazením všech pěti daných uspořádaných dvojic. Relativně vysoká četnost nesprávných odpovědí naznačuje, že žáci mohli rozhodnout jen na základě ověření jedné uspořádané dvojice, případně že za proměnné dosadili nesprávné hodnoty (zaměnili proměnné  $x$  a  $y$ ).

## 3 GEOMETRIE

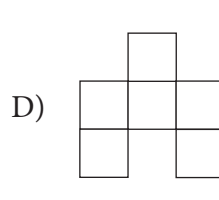
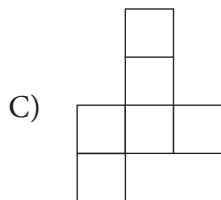
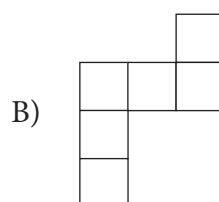
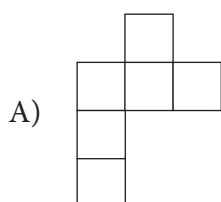
Oblast učiva *geometrie* se zaměřuje na využívání geometrických vlastností různých geometrických útvarů, například délek stran nebo velikostí úhlů. Žáci by měli ovládat geometrická měření, přesně používat měřicí pomůcky, ve vhodných situacích odhadovat a používat správné vzorce pro výpočet obvodu, obsahu a objemu. Měli by umět aplikovat Pythagorovu větu. Součástí této oblasti učiva je i zobrazování a využívání prostorové představivosti při přecházení mezi trojrozměrnými útvary a jejich dvojrozměrným zobrazením. Důležité jsou i první spojovací články mezi geometrií a algebrou.

Oblast učiva *geometrie* je rozdělena do tří tematických celků: geometrické tvary; geometrické měření; poloha a změna polohy.

### 3.1 GEOMETRICKÉ TVARY

#### Úloha M43 (M02-09)

Ze které sítě se dá složit krychle?



Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: rozpoznávání vztahů mezi trojrozměrnými útvary a jejich dvojrozměrným zobrazením

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	65,5	69,0	62,2
Mezinárodní průměr	43,5	43,4	43,7

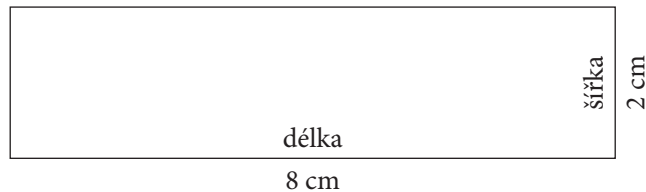
Hodnocení

**Správná odpověď:** C

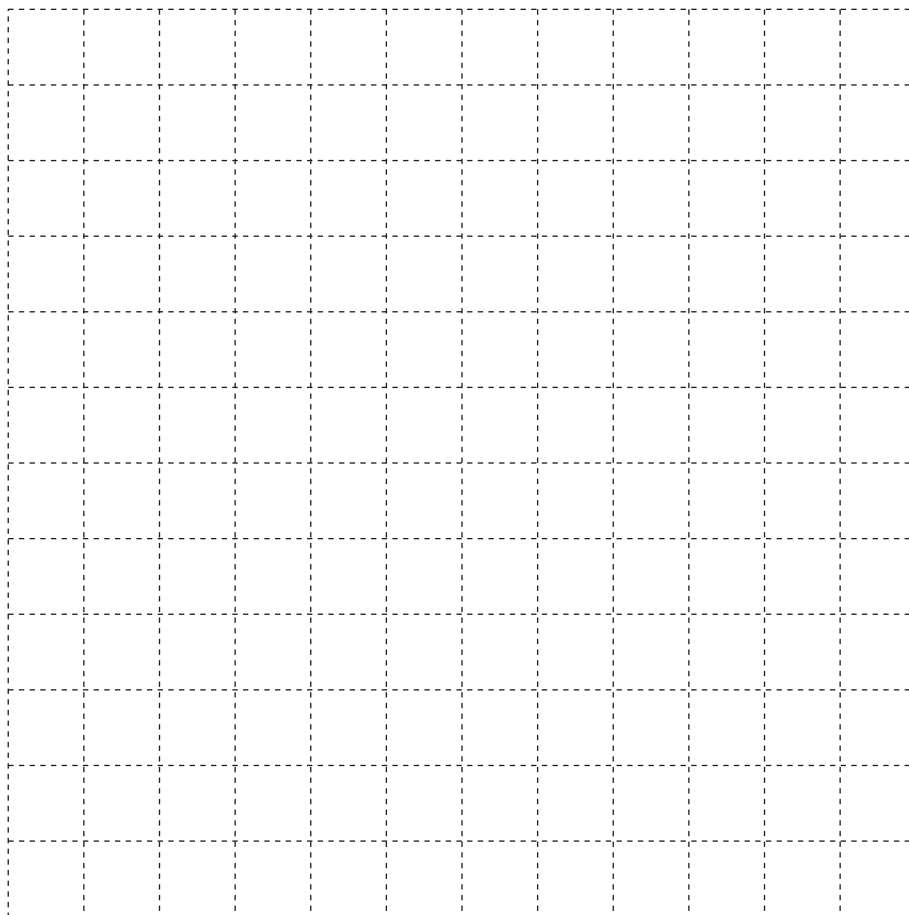
Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	5,8	13,6	65,5	12,4

V úloze mají žáci identifikovat síť krychle a prokázat svoji prostorovou představivost. Čeští žáci byli při řešení velmi úspěšní a překonali výrazně mezinárodní průměr.

**Úloha M44 (M01-11)**



- A. Do čtvercové sítě dole nakresli obdélník, jehož délka se rovná třem čtvrtinám délky obdélníku na horním obrázku a jehož šířka se rovná dva a půl násobku šířky obdélníku na horním obrázku. Ve svém obrázku uveď délku a šířku nakresleného obdélníku v centimetrech. Strana čtverce ve čtvercové síti je dlouhá 1 cm.



- B. Jaký je poměr obsahu původního obdélníku k obsahu nového obdélníku?

Oblast: A geometrie

B čísla

Obsah: A geometrické tvary

B poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: A rýsování nebo kreslení trojúhelníků a obdélníků daných rozměrů

B rozpoznávání a nacházení ekvivalentních poměrů, vyjadřování poměrů

Dovednost: A používání znalostí

B používání znalostí

Obtížnost: A úroveň 4

B úroveň 4

A

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	27,2	25,6	29,0
Česká republika 2007	19,8	20,7	19,0
Mezinárodní průměr	16,4	17,1	15,8

B

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	20,0	18,9	21,2
Česká republika 2007	10,4	9,8	11,0
Mezinárodní průměr	11,0	11,8	10,3

Hodnocení

A

**Poznámka:** Není rozdíl mezi odpověďmi s jednotkami nebo bez nich.

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
20	6 cm a 5 cm. Obdélník je správně nakreslen a popsán.
	<b>Částečně správná odpověď</b>
10	Obdélník je správně popsán 6 cm a 5 cm, ale je špatně nakreslen.
11	Obdélník je správně nakreslen, ale délka a/nebo šířka není popsána, nebo je popsána nesprávně.
	<b>Nesprávná odpověď</b>
70	Jedna strana je 6 cm a druhá je nesprávně, je to uvedeno nebo je to vidět z nákresu.
71	Jedna strana je 5 cm a druhá je nesprávně, je to uvedeno nebo je to vidět z nákresu.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědi nesouvisějících se zadáním). Také zahrnuje odpovědi bez nákresu.
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdňé

Odpovědi českých žáků							
Kód odpovědi	20	10	11	70	71	79	99
Četnost [%]	19,8	0,5	13,7	10,1	6,3	24,6	25,0

V úloze žáci prokazují, že umí vynásobit celé číslo zlomkem, resp. desetinným číslem a že umí v centimetrové čtvercové síti zakreslit obdélník daných rozměrů. Čeští žáci sice v úspěšnosti řešení překonali mezinárodní průměr, úloha však měla překvapivě malé procento úspěšnosti řešení. V porovnání s rokem 1999 byla úspěšnost našich žáků nižší, chlapci se zhoršili více než dívky.

B

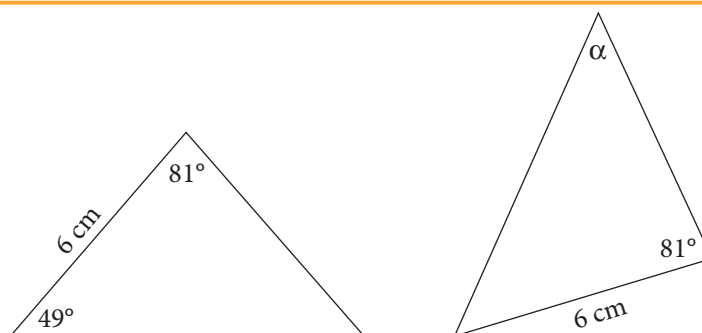
**Poznámka:** Není rozdíl mezi odpověďmi s jednotkami nebo bez nich.

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
20	8:15, $\frac{8}{15}$ nebo ekvivalentní (např. $\frac{16}{30}$ ).
21	Poměr není 8:15, ale poměr v části B je v souladu s odpověďmi v části A.
<b>Částečně správná odpověď</b>	
10	15:8 nebo ekvivalentní [poměr nového ku původnímu].
11	Uvádí poměr nového obdélníku ku původnímu. Poměr není 15:8, ale poměr v části B je v souladu s odpověďmi v části A.
19	Jiná částečně správná včetně správného poměru, ale nesprávně vykráceného (např. $\frac{16}{30} = \frac{3}{10}$ ).
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	Zaměřuje se výhradně na poměry délek a/nebo šířek mezi obdélníky nebo v obdélnících.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním). Také zahrnuje násobení poměru délek a šířek.
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků								
Kód odpovědi	20	21	10	11	19	70	79	99
Četnost [%]	8,6	1,9	2,3	0,3	0,6	1,8	25,9	58,7

V úloze žáci prokazují, že umí vypočítat obsah obdélníku, jsou-li dány délky jeho sousedních stran, a poměrem porovnat dva údaje. Při hodnocení úlohy se sledoval pouze poměr obsahu obdélníků, pokud žáci správně vypočítali obsah obou obdélníků, ale neporovnali je poměrem, nezískali žádný bod. Úloha měla opět velmi malé procento úspěšnosti a čeští žáci tentokrát mezinárodní průměr nepřekonali. Navíc jejich průměrná úspěšnost výrazně zaostala za hodnotou z roku 1999.

## Úloha M45 (M01-08)



Tyto dva trojúhelníky jsou shodné. Velikosti některých stran a úhlů jsou uvedeny na obrázku. Jaká je velikost úhlu  $\alpha$  ?

- A)  $49^\circ$
- B)  $50^\circ$
- C)  $60^\circ$
- D)  $70^\circ$
- E)  $81^\circ$

Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: znalost a užívání vlastností geometrických útvarů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	48,7	46,3	51,7
Česká republika 2007	40,6	41,8	39,5
Mezinárodní průměr	35,1	34,9	35,4

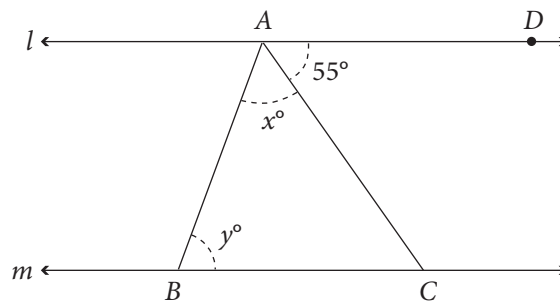
Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	43,4	40,6	5,8	3,2

K nalezení správné odpovědi je třeba využít dvou poznatků: o vlastnostech shodných trojúhelníků (shodnost odpovídajících si vnitřních úhlů) a o velikosti součtu vnitřních úhlů trojúhelníků. V žákovských odpovědích měla největší četnost nesprávná odpověď A, která uvádí velikost úhlu přilehlého, nikoliv protilehlého ke straně dlouhé 6 cm. Je pravděpodobné, že žáci, kteří volili tuto odpověď, z tvaru trojúhelníků na obrázku usuzovali na to, že jsou rovnoramenné, a mají tudíž shodné úhly při základně (velikost součtu vnitřních úhlů nekontrolovali). Druhým možným způsobem, jak mohli žáci, kteří volili nesprávnou odpověď A, postupovat, je řešení úlohy myšlenkovou transformací (přemístěním) trojúhelníků tak, aby se kryly. Protože tvar trojúhelníků sváděl k domněnce, že trojúhelníky jsou rovnoramenné, použili však místo transformace prostorové transformaci v rovině (kryly se úhly s velikostí  $81^\circ$ , nikoli však strany s vyznačenou délkou 6 cm). Pak se úhel  $\alpha$  kryl s úhlem o velikosti  $49^\circ$ .

Úloha M46 (M02-10)



Na obrázku je přímka  $l$  rovnoběžná s přímku  $m$ . Velikost úhlu  $DAC$  je  $55^\circ$ .

Kolik je  $x + y$ ?

- A) 55
- B) 110
- C) 125
- D) 135

Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: znalost a užívání vlastností geometrických útvarů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	42,9	42,0	43,7
Mezinárodní průměr	42,1	42,3	41,9

Hodnocení

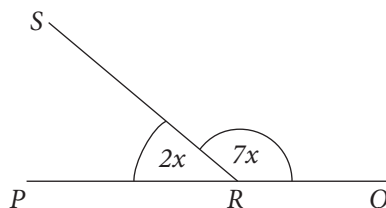
**Správná odpověď:** C

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	9,8	33,5	42,9	5,6

Řešení úlohy vyžaduje užití vlastností střídavých a vedlejších úhlů. Střídavý úhel k úhlu  $ABC$  tvoří s úhly  $DAC$  a  $BAC$  úhel přímý, tj.  $x + y + 55 = 180$ , odkud  $x + y = 125$ . Druhý způsob řešení: střídavý úhel k úhlu  $DAC$  a úhly  $ABC$  a  $BAC$  jsou vnitřní úhly trojúhelníku  $ABC$  a jejich součet je  $180^\circ$ , tj.  $x + y + 55 = 180$ , odkud  $x + y = 125$ .

**Úloha M47 (M03-06)**

Na obrázku je přímka  $PQ$ .



Jaká je velikost úhlu  $PRS$  ve stupních?

- A)  $10^\circ$
- B)  $20^\circ$
- C)  $40^\circ$
- D)  $70^\circ$
- E)  $140^\circ$

Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: znalost a užívání vlastností úhlů, osy úhlu a kolmosti

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	68,2	66,1	70,2
Česká republika 2007	63,4	59,7	66,9
Mezinárodní průměr	52,6	50,5	54,8

Hodnocení

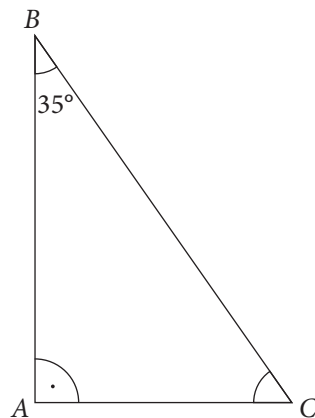
**Správná odpověď:** C

Odpovědi českých žáků					
Odpověď	A	B	C	D	E
Četnost	0,9	12,3	63,4	12,4	6,9

Při řešení úlohy musí žáci použít poznatek o velikosti přímého úhlu a prokázat schopnost vyřešit jednoduchou lineární rovnici. Vyšší četnost nesprávné odpovědi B vypovídá o tom, že žáci nalezením kořenu rovnice výpočet úlohy ukončili a položenou otázku nezodpověděli.



Úloha M48 (M03-14)



Kolik měří úhel s vrcholem v bodě C v trojúhelníku na obrázku?

- A)  $45^\circ$
- B)  $55^\circ$
- C)  $65^\circ$
- D)  $145^\circ$

Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: znalost a užívání vlastností geometrických útvarů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	60,4	59,5	61,3
Mezinárodní průměr	58,6	59,0	58,3

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	17,9	60,4	11,4	6,0

Úloha ověřuje, zda žáci umí použít poznatek o velikosti součtu vnitřních úhlů trojúhelníku k výpočtu velikosti jednoho vnitřního úhlu trojúhelníku, jsou-li dány velikosti zbývajících dvou z nich. Přitom se předpokládá znalost označení pravého úhlu.

**Úloha M49 (M03-15)**

Na obrázku je přímka  $AO$ . Nakresli přímku  $BC$  procházející bodem  $O$  tak, aby úhel  $AOB$  byl ostrý a úhel  $AOC$  tupý. Vyznač body  $B$  a  $C$ .



Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: rozeznávání a rýsování úhlů – ostrý, pravý, přímý, tupý a nekonvexní

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	53,2	55,6	50,8
Mezinárodní průměr	37,6	39,4	35,8

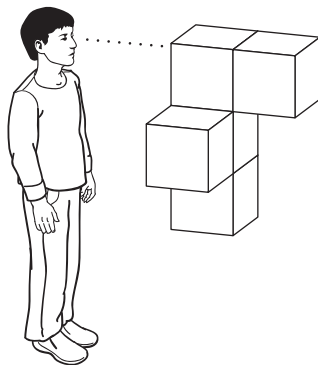
Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	Přímka prochází bodem $O$ ; ostrý a tupý úhel jsou správně a jsou označeny.
	<b>Nesprávná odpověď</b>
70	Přímka prochází bodem $O$ , ale není označena.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

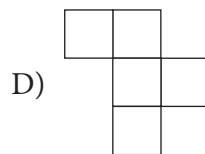
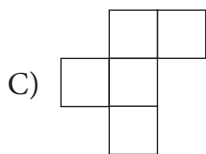
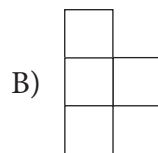
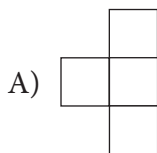
Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	53,2	1,5	26,6	18,7

V úloze žáci prokazují, že rozumí pojmům ostrý a tupý úhel a že umí popsat úhly pomocí tří nekolineárních bodů. Výsledek českých žáků byl mnohem lepší než mezinárodní průměr.

Úloha M50 (M04-09)



Těleso je vytvořeno z 5 krychliček.  
Jaký tvar vidí osoba na obrázku?



Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: rozpoznávání vztahů mezi trojrozměrnými útvary a jejich dvojrozměrným zobrazením

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	78,7	78,2	79,3
Mezinárodní průměr	48,7	48,6	48,8

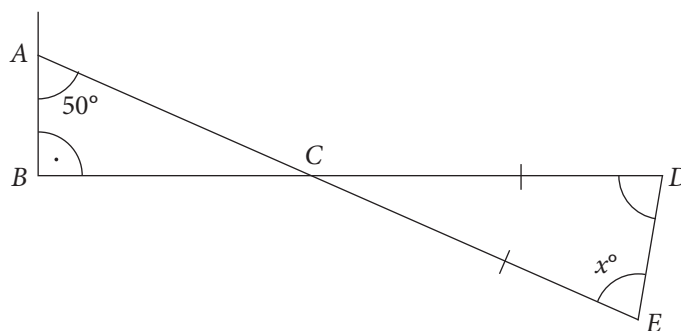
Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	9,5	78,7	8,9	2,7

V úloze mají žáci prokázat svou prostorovou představivost a trojrozměrnému tělesu přiřadit jeho bokorys. Při jejím řešení byli čeští žáci velmi úspěšní a o 30 % překonali mezinárodní průměr.

## Úloha M51 (M04-10)



Na obrázku je  $|CD| = |CE|$ .

Kolik je hodnota  $x$  ?

- A) 40
- B) 50
- C) 60
- D) 70

Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: uplatňování geometrických vlastností při řešení úloh

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	27,2	26,1	28,4
Mezinárodní průměr	31,8	31,5	32,1

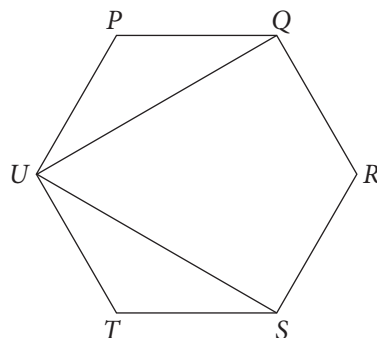
Hodnocení

**Správná odpověď:** D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	12,0	33,0	21,4	27,2

Komplexní geometrická úloha, jejíž řešení vyžaduje uplatnit tři poznatky: o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku, o velikosti vrcholových úhlů a o velikosti vnitřních úhlů ležících při základně rovnoramenného trojúhelníku. Z nesprávných odpovědí měla nejvyšší četnost odpověď B, kterou volila přibližně 1/3 žáků. Ti pravděpodobně nevycházeli z textu úlohy, ale z názoru vytvořeného na základě obrázku a chybně předpokládali, že trojúhelníky jsou shodné (středová souměrnost se středem C), nebo že na obrázku jsou rovnoběžky prořáté příčkou (střídavé úhly).

**Úloha M52 (M05-09)**



*PQRSTU* je pravidelný šestiúhelník. Kolik měří úhel *QUS* ?

- A)  $30^\circ$
- B)  $60^\circ$
- C)  $90^\circ$
- D)  $120^\circ$

Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: znalost a užívání vlastností geometrických útvarů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	57,8	58,0	57,5
Mezinárodní průměr	51,5	50,2	52,9

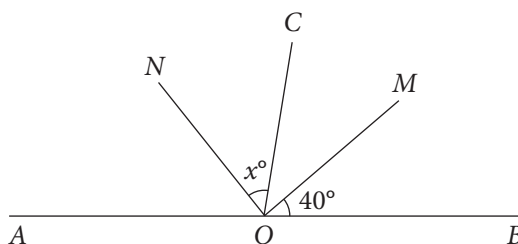
Hodnocení

**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	12,5	57,8	12,1	9,6

Deduktivní geometrická úloha, při jejímž řešení mají žáci použít znalosti o vlastnostech pravidelného šestiúhelníku a o vlastnostech trojúhelníků. Jeden způsob řešení je založen na těchto úvahách: Z vlastností pravidelného šestiúhelníku vyplývá shodnost trojúhelníků *UQP*, *UST* a *SQR* (sus). Trojúhelník *QUS* je proto rovnostranný – jeho vnitřní úhly jsou shodné a měří  $60^\circ$ . Jiný postup řešení vychází z velikosti vnitřních úhlů šestiúhelníku ( $120^\circ$ ). Protože trojúhelníky *UST* a *UQP* jsou rovnoramenné a úhel při hlavním vrcholu má velikost  $120^\circ$ , úhly při základnách mají velikost  $30^\circ$ . Pro úhel *QUS* platí:  $QUS = PUT - PUQ - TUS$ , tedy velikost úhlu  $QUS = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Lze najít i další způsoby výpočtu velikosti úhlu *QUS*. Způsob zadání úlohy (úloha s výběrem odpovědi) umožňoval rovněž správnou odpověď uhodnout podle obrázku na základě zkušeností žáků opřených o jejich představy o velikosti úhlů – úhel *QUS* určitě není pravý ani tupý, ale je větší než polovina úhlu *PUS*, což „by mohl být“ (je) úhel pravý.

## Úloha M53 (M07-09)



Na obrázku nahoře leží body  $A$ ,  $O$  a  $B$  v přímce. Přímka  $OM$  půlí úhel  $BOC$  a přímka  $ON$  půlí úhel  $AOC$ . Kolik je hodnota  $x$  ?

Obsah: geometrické tvary

Cíl úlohy: znalost a užívání vlastností úhlů, osy úhlu a kolmosti

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	31,7	28,0	34,9
Mezinárodní průměr	28,9	29,4	28,4

Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	50 (s uvedením stupňů nebo bez).
	<b>Nesprávná odpověď</b>
70	40 (s uvedením stupňů nebo bez).
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	31,7	20,9	31,1	16,3

Deduktivní geometrická úloha, při jejímž řešení se uplatní poznatky o ose úhlu (půlení úhlu) a o vlastnostech vedlejších úhlů.

### 3.2 GEOMETRICKÉ MĚŘENÍ

#### Úloha M54 (M01-05)

Jaký je obvod čtverce, jehož obsah je 100 čtverečných metrů?

Obsah: geometrické měření

Cíl úlohy: používání vhodných vzorců pro výpočet obvodů, délky kružnic, obsahu kruhů, povrchů a objemů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	43,7	37,0	51,8
Česká republika 2007	34,2	33,7	34,7
Mezinárodní průměr	28,5	27,9	29,1

Hodnocení

**Poznámka:** Není rozdíl mezi odpověďmi s jednotkami nebo bez nich.

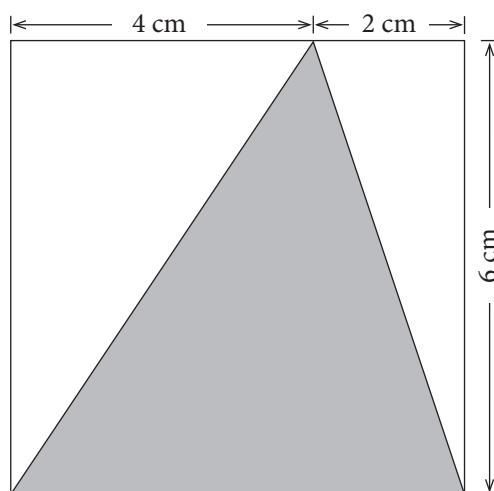
Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	40 m
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	25 m [100 : 4 strany]
71	10 m [délka 1 strany]
72	100 m [10 · 10]
73	400 m [100 · 4 strany]
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdne

Odpovědi českých žáků							
Kód odpovědi	10	70	71	72	73	79	99
Četnost [%]	34,2	5,3	8,8	2,1	10,4	21,9	17,2

Složená slovní úloha, v níž měli žáci vypočítat obvod čtverce, byl-li dán jeho obsah. Při řešení úlohy měli žáci prokázat znalost příslušných vzorců a schopnost použít je při výpočtu, přičemž nebylo vyžadováno, aby žáci postup výpočtu zaznamenali – i odpověď, která obsahovala pouze správnou číselnou hodnotu (i bez jednotek), byla považována za správnou. Přesto měla úloha poměrně nízké procento úspěšnosti jak v mezinárodním měřítku, tak v České republice. Pozorujeme přitom zhoršení českých žáků v porovnání s rokem 1999.

### Úloha M55 (M01-12)

Na obrázku je uvnitř čtverce vybarvený trojúhelník.



Jaký je obsah vybarveného trojúhelníku?

Obsah: geometrické měření

Cíl úlohy: používání vhodných vzorců pro výpočet obvodů, délky kružnic, obsahu kruhů, povrchů a objemů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	33,2	33,0	33,5
Česká republika 2007	23,1	20,6	25,3
Mezinárodní průměr	28,7	29,1	28,4

Hodnocení

**Poznámka:** Není rozdíl mezi odpovědí s jednotkami nebo bez nich.

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	18 cm <sup>2</sup>



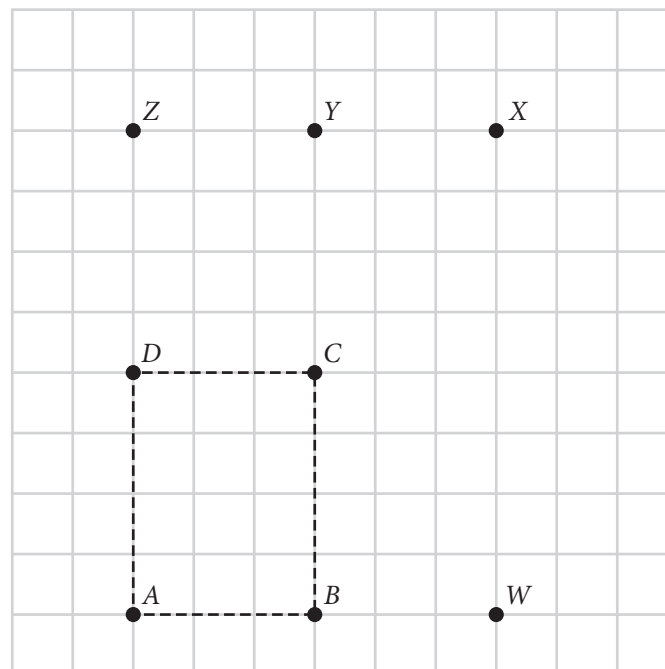
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	36 cm <sup>2</sup>
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	23,1	3,5	41,0	32,4

V úloze mají žáci vypočítat obsah trojúhelníku vepsaného do čtverce daných rozměrů. Při jejím řešení musí prokázat nejen to, že znají a umí použít vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, ale i že parametry potřebné pro výpočet dokážou vyčíst z obrázku. To, že nebyla explicitně uvedena délka strany a příslušná výška trojúhelníku, byl pravděpodobný důvod poměrně nízké úspěšnosti řešení úlohy.

### Úloha M56 (M04-11)

Použij vyznačené body a nakresli trojúhelník, který má obsah DVAKRÁT větší než obdélník ABCD.



Obsah: geometrické měření

Cíl úlohy: měření, kreslení a odhad délky úseček, obvodů, obsahů a objemů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	64,7	65,9	63,4
Mezinárodní průměr	48,8	49,8	47,9

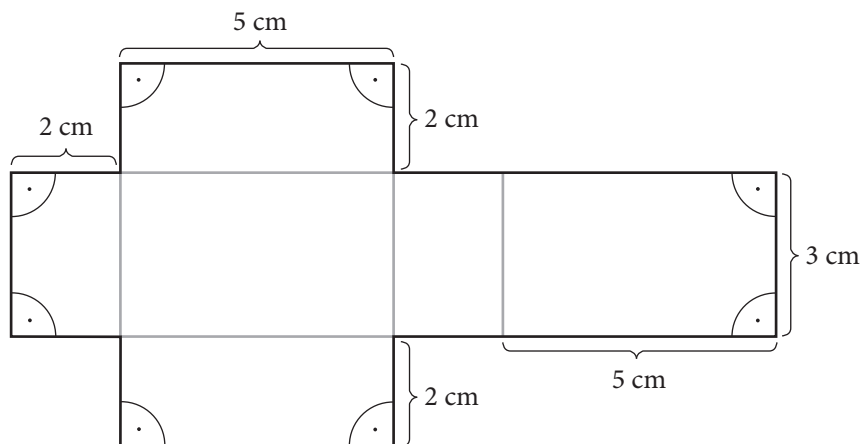
## Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	Pomocí vyznačených bodů nakreslen trojúhelník s obsahem 24 čtverečků. Např. AZW, ZWX, XAW, XZA, AYW, BZX a XWD.
	<b>Nesprávná odpověď</b>
70	Nakreslen trojúhelník s obsahem 12 čtverečků.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	64,7	8,3	16,2	10,8

K řešení úlohy je možné využít dvě strategie. Vypočítat obsah obdélníku (12 jednotek), pomocí tohoto údaje vypočítat obsah trojúhelníku (24 jednotek) a z tohoto údaje s využitím znalosti vzorce pro obsah trojúhelníku zjistit, jaké rozměry (strana a příslušná výška) může trojúhelník mít. Vzhledem k velikosti sítě přichází pro rozměry trojúhelníku v úvahu možnost 6 a 8 jednotek délky. Druhý způsob řešení, který mohli žáci použít, je řešení grafické, které představuje úkol ze dvou obdélníků „složit“ trojúhelník. K tomu postačí pomocí úhlopříčky rozdělit jeden obdélník na dva trojúhelníky a ty vhodně přemístit tak, aby spolu s druhým obdélníkem vytvořily trojúhelník. Úloha není zadána jednoznačně – v síti lze nakreslit více trojúhelníků, které splňují podmínky úlohy.

**Úloha M57 (M05-04)**



Když útvar na obrázku složíme, vznikne krabička s obdélníkovými stěnami.  
Vypočítej objem krabičky.

Obsah: geometrické měření

Cíl úlohy: používání vhodných vzorců pro výpočet obvodů, délky kružnic, obsahu kruhů, povrchů a objemů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	29,8	30,2	29,3
Mezinárodní průměr	28,9	29,6	28,1

Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	30 nebo ekvivalentní.
	<b>Nesprávná odpověď</b>
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdne

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	10	79	99
Četnost [%]	29,8	36,0	34,3

Úloha neověřuje pouze to, zda žáci umí vypočítat objem kvádrů. Při jejím řešení musí žáci prokázat i prostorovou představivost (síti přiřadit odpovídající těleso) a schopnost z grafického zadání určit rozměry potřebné pro výpočet objemu. Komplexnímu charakteru úlohy odpovídala i menší úspěšnost jejího řešení.

### Úloha M58 (M07-07)

Kruhový rybník má poloměr 10 metrů. V průměru připadají na jeden čtverečný metr v rybníku 2 žáby. Přibližně kolik žab je v rybníku?  $\pi$  je přibližně 3,14.

- A) 120 žab
- B) 300 žab
- C) 600 žab
- D) 2 400 žab

Obsah: geometrické měření

Cíl úlohy: používání vhodných vzorců pro výpočet obvodů, délky kružnic, obsahu kruhů, povrchů a objemů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 5

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	31,9	34,3	29,8
Mezinárodní průměr	28,4	28,2	28,5

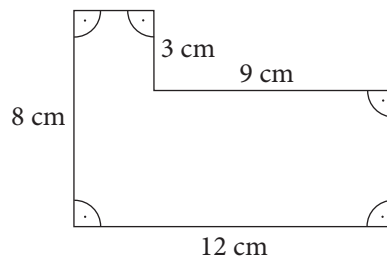
Hodnocení

**Správná odpověď:** C

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	35,6	22,0	31,9	2,3

Složená slovní úloha s třemi kroky řešení: výpočet obsahu kruhu, výpočet počtu žab (přímá úměrnost) a zaokrouhlování. V žakovském řešení měla největší četnost odpověď A, která byla chybná – žáci buď místo obsahu kruhu počítali jeho obvod, nebo pro výpočet obsahu kruhu použili nesprávný vzorec.

Úloha M59 (M07-08)



Kolik čtverečných centimetrů je obsah obrazce na obrázku?

- A)  $66 \text{ cm}^2$
- B)  $69 \text{ cm}^2$
- C)  $81 \text{ cm}^2$
- D)  $96 \text{ cm}^2$

Obsah: geometrické měření

Cíl úlohy: určování rozměrů nepravidelných a složených obrazců

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	50,0	46,6	53,0
Mezinárodní průměr	40,9	39,5	42,3

Hodnocení

**Správná odpověď:** B

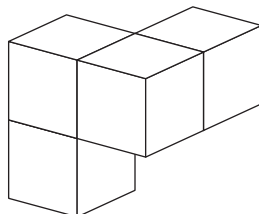
Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	16,4	50,0	13,3	13,0

Žáci neznají vzorec, do něhož by dosazením přímo vypočítali obsah mnohoúhelníku. V úloze musí prokázat schopnost transformovat řešení problému na více jednoduchých úloh, které umí vyřešit. V tomto případě bylo potřeba rozdělit vodorovnou, resp. svislou úsečkou mnohoúhelník na dva nepřekrývající se čtyřúhelníky (pravoúhelníky), určit jejich rozměry, podle známých vzorců vypočítat jejich obsah a získané hodnoty sečíst.

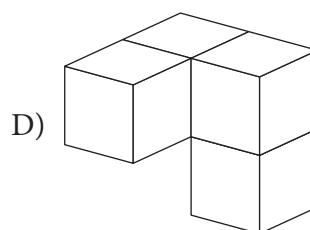
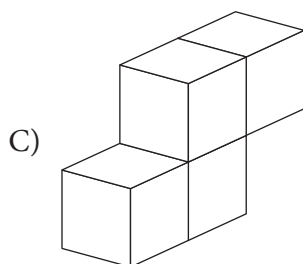
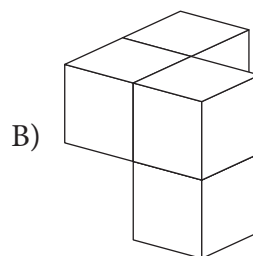
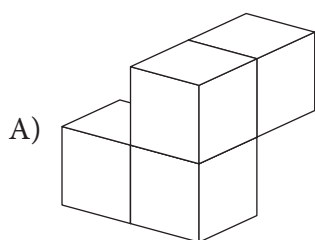
### 3.3 POLOHA A ZMĚNA POLOHY

#### Úloha M60 (M01-03)

Těleso otočíme do jiné polohy.



Na kterém obrázku by mohlo být otočené těleso?



Obsah: poloha a změna polohy

Cíl úlohy: rozpoznávání nebo načrtnutí posunutí, souměrnosti a otočení

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	76,9	73,5	81,1
Česká republika 2007	72,1	68,8	75,0
Mezinárodní průměr	56,5	53,5	59,5

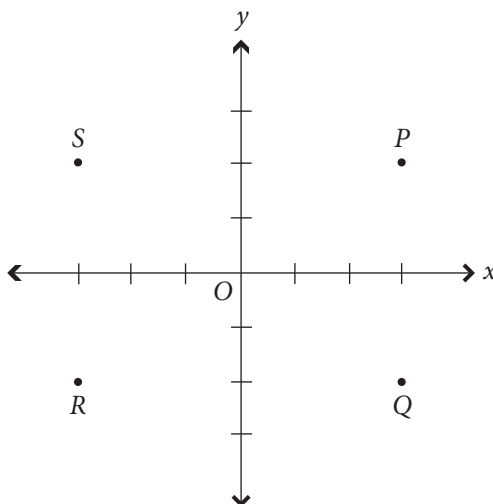
Hodnocení

**Správná odpověď: D**

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	10,7	13,5	2,4	72,1

Cílem úlohy je vybrat možnost, která znázorňuje těleso po jeho otočení. Úloha klade nároky na prostorovou představivost a při řešení nelze využít manipulaci s testovým sešitem. V úspěšnosti řešení úlohy překonali čeští žáci mezinárodní průměr, přičemž chlapci byli úspěšnější než dívky.

**Úloha M61 (M02-11)**



Který bod má souřadnice  $[3, -2]$ ?

- A) P
- B) Q
- C) R
- D) S

Obsah: poloha a změna polohy

Cíl úlohy: používání uspořádaných dvojic, rovnic, dvou bodů, průsečíků a směrnic k určování polohy bodů a přímek v rovině

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	58,6	59,0	58,3
Mezinárodní průměr	62,8	63,5	62,0

Hodnocení

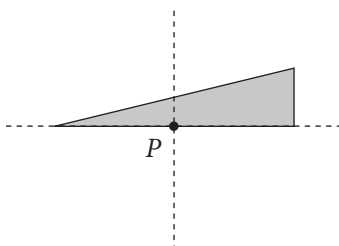
**Správná odpověď:** B

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	12,8	58,6	18,3	6,1

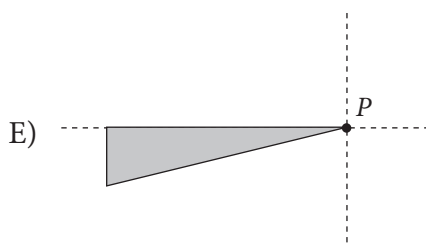
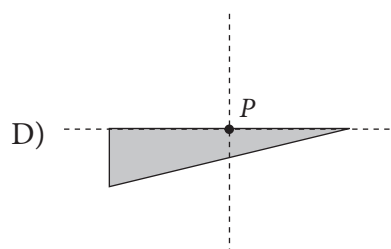
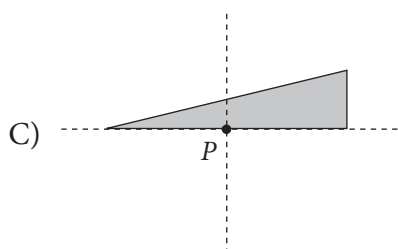
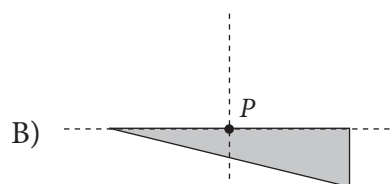
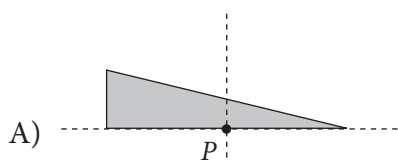
Úloha ověřuje, zda žáci umí v kartézské soustavě souřadnic identifikovat bod s danými souřadnicemi.

Úloha M62 (M03-04)

Vybarvený útvar na obrázku se otočí v rovině o půl otáčky kolem bodu  $P$ .



Který z obrázků ukazuje výsledek otočení?



Obsah: poloha a změna polohy

Cíl úlohy: rozpoznávání nebo načrtnutí posunutí, souměrnosti a otočení

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 4

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	35,2	26,7	42,9
Česká republika 2007	39,4	38,2	40,5
Mezinárodní průměr	37,8	36,7	38,9

Hodnocení

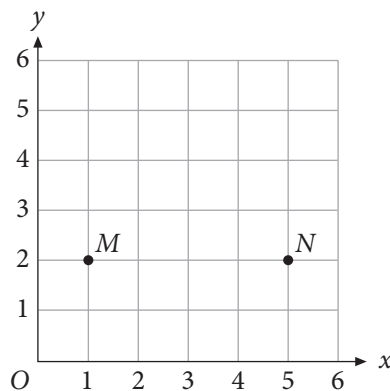
**Správná odpověď:** D



Odpovědi českých žáků					
Odpověď	A	B	C	D	E
Četnost	24,0	24,4	2,4	39,4	7,3

Cílem úlohy je rozpoznat otočený obrazec v rovině. Žáci mohli využít i možnosti manipulace s testovým sešitem. Otáčení bylo definováno pouze středem a velikostí otáčení, nikoli směrem (vzhledem k velikosti otáčení o  $180^\circ$  výsledek na směru otáčení nezávisí). Z nesprávných odpovědí byly nejčetnější odpovědi A a B, které odpovídají otočení trojúhelníku v prostoru o půl otáčky kolem čárkovaně vyznačené svislé, resp. vodorovné přímky.

### Úloha M63 (M07-10)



Na obrázku nahoře jsou vyznačeny dva body  $M$  a  $N$ . Jan hledá takový bod  $P$ , aby trojúhelník  $MNP$  byl rovnoramenný. Který z následujících bodů může být bod  $P$  ?

- A)  $[3, 5]$
- B)  $[3, 2]$
- C)  $[1, 5]$
- D)  $[5, 1]$

Obsah: poloha a změna polohy

Cíl úlohy: používání uspořádaných dvojic, rovnic, dvou bodů, průsečíků a směrnic k určování polohy bodů a přímek v rovině

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	62,9	63,6	62,2
Mezinárodní průměr	57,3	59,2	55,5

Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	62,9	13,1	6,5	13,2

Při řešení úlohy žák prokazuje, že umí zobrazit bod s danými souřadnicemi v kartézské soustavě souřadnic a že zná vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku (kdyby byla úsečka  $MN$  základnou rovnoramenného trojúhelníku, musel by bod  $P$  ležet na ose úsečky  $MN$  a s body  $M, N$  by musel být nekolineární; kdyby  $MN$  byla ramenem rovnoramenného trojúhelníku, musely by být úsečky  $MN$  a  $MP$  shodné).



## 4 DATA A PRAVDĚPODOBNOST

Do oblasti učiva *data a pravděpodobnost* patří znalosti o tom, jak uspořádat a zobrazit data, větší důraz je však kladen na jejich interpretaci, na počítání statistických charakteristik datových souborů, na vyvozování závěrů z poskytnutých dat a na problematiku jejich chybné interpretace. Při zobrazování dat by žáci měli chápat význam různých čísel, symbolů a bodů. Například by měli rozpoznat, že některá čísla znamenají hodnoty dat a jiná četnost, s níž se dané hodnoty vyskytují. V 8. ročníku by žáci měli ovládat též základní poznatky z pravděpodobnosti.

Oblast učiva *data a pravděpodobnost* se skládá ze tří tematických celků: uspořádání a znázornění dat; interpretace dat; pravděpodobnost.

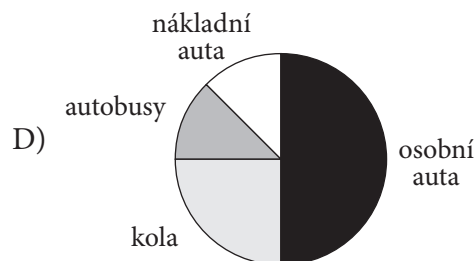
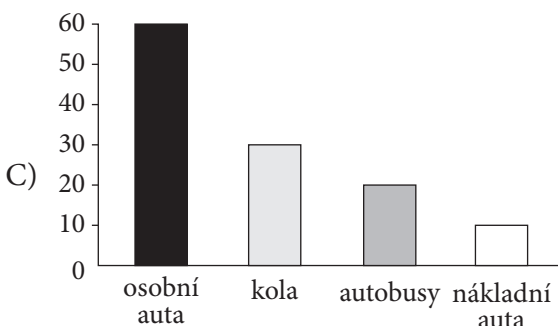
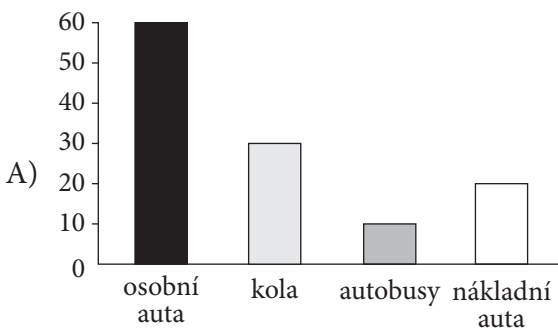
### 4.1 USPOŘÁDÁNÍ A ZNÁZORNĚNÍ DAT

#### Úloha M64 (M02-12)

Čtyři žáci sledovali dopravu v okolí své školy po dobu 1 hodiny. Tabulka ukazuje, co viděli:

Dopravní prostředek	Počet
osobní auta	60
kola	30
autobusy	10
nákladní auta	20

Každý žák nakreslil diagram, v němž zaznamenal výsledky. Který diagram je správný?



Obsah: uspořádání a znázornění dat

Cíl úlohy: porovnávání a uvádění do souvislosti různých způsobů znázornění stejných dat

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 1

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	85,1	87,3	83,0
Mezinárodní průměr	76,8	78,7	74,8

Hodnocení

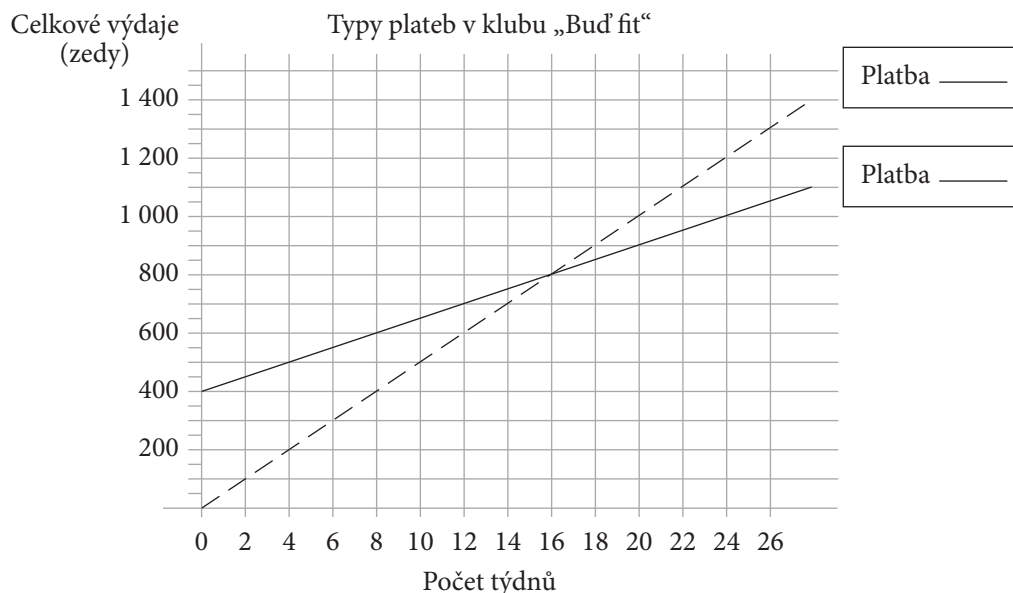
**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	85,1	0,3	7,1	5,9

Žáci mají identifikovat diagram, který znázorňuje údaje uvedené v tabulce. Úloha byla pro žáky jednoduchá a měla vysoké procento úspěšnosti řešení. Obtížnost úlohy by bylo vhodné zvýšit tím, že by nebyla uvedena stupnice na svislé ose sloupkových diagramů – žáci by nemohli přečíst hodnoty pro jednotlivé druhy dopravních prostředků přímo z diagramu a k nalezení správného řešení by museli porovnávat počty dopravních prostředků mezi sebou.

### Úloha M65 (M07-13)

Klub „Buď fit“ nabízí dva různé typy plateb. U platby A je počáteční poplatek 400 zedů a týdenní poplatek 25 zedů. U platby B není žádný počáteční poplatek, ale týdenní poplatek činí 50 zedů. Obrázek porovnává výdaje při platbě A a platbě B.



- Označ přímkou, která znázorňuje výdaje při platbě A, a přímkou, která znázorňuje výdaje při platbě B.
- V kterém týdnu bys zaplatil stejně při platbě A i při platbě B?
- Kolik je rozdíl mezi oběma platbami za 24 týdnů?

Obsah: uspořádání a znázornění dat

Cíl úlohy: A třídění a zobrazování dat pomocí tabulek, obrázkových, sloupcových, kruhových a spojnicových diagramů

B čtení dat z tabulek, obrázkových, sloupcových, kruhových a spojnicových diagramů

C čtení dat z tabulek, obrázkových, sloupcových, kruhových a spojnicových diagramů

Dovednost: A používání znalostí

B prokazování znalostí

C používání znalostí

Obtížnost: A úroveň 2

B úroveň 2

C úroveň 3

A

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	68,0	71,2	65,2
Mezinárodní průměr	54,5	57,5	51,6

B

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	64,7	64,4	65,0
Mezinárodní průměr	48,7	51,0	46,5

C

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	48,7	48,4	48,9
Mezinárodní průměr	33,7	33,9	33,5

Hodnocení

A

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	Přímky označeny správně; platba A plná čára a platba B čárkovaná čára.
	<b>Nesprávná odpověď</b>
70	Přímky označeny nesprávně.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	68,0	8,6	4,9	18,5

Úkolem žáků je identifikovat přímku, která v soustavě souřadnic znázorňuje slovně popsanou závislost dvou veličin. Přitom postačí vycházet z informace o výši počátečního poplatku a zjistit, na které přímce leží bod se souřadnicemi  $[0, 400]$ , resp.  $[0, 0]$ .

B

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	16
<b>Nesprávná odpověď</b>	
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	10	79	99
Četnost [%]	64,7	9,3	26,1

Při řešení úlohy uplatní žáci znalosti získané při grafickém řešení soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými. Pokud tyto znalosti ještě nemají, musí prokázat schopnost interpretovat graficky zobrazená data – zpočátku je poplatek větší při platbě A, ale roste pomaleji, v průsečíku grafů se poplatky vyrovnají a dále je větší poplatek při platbě B. Úloha dále ověřuje, zda žáci umí určit souřadnice bodu v soustavě souřadnic.

C

**Poznámka:** 1 200 – 1 000 se kóduje jako 10.

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	200 zedů (s jednotkami nebo bez nich)
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	1 200 zedů, 1 000 zedů nebo 1 200 a 1 000
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).

## Bez odpovědi

99 Prázdné

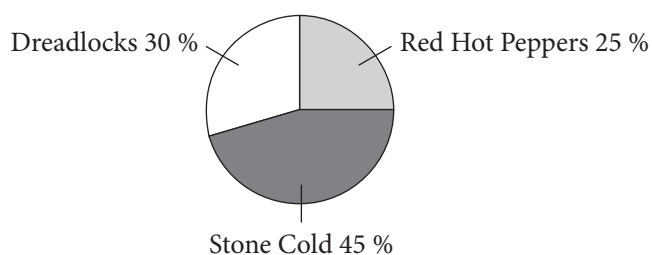
Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	48,7	1,4	19,8	30,1

Úlohu lze řešit numericky – výpočtem výše poplatku za 24 týdnů podle platby A, resp. B. Záměrem autorů však bylo, aby žáci rozdíl hodnot přečetli v grafu. Výsledek českých žáků byl ve všech třech částech úlohy výrazně nadprůměrný.

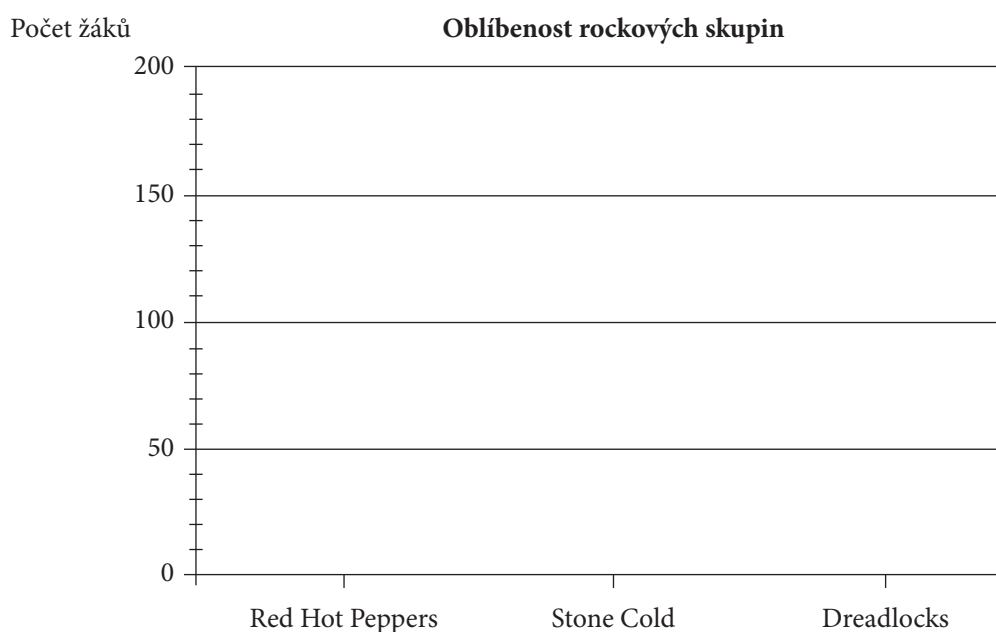
## Úloha M66 (M02-14)

V kruhovém diagramu jsou zobrazeny výsledky průzkumu mezi 200 žáky.

Oblíbenost rockových skupin



Nakresli sloupcový diagram, který udává počet žáků v každé kategorii z kruhového diagramu.





Obsah: uspořádání a znázornění dat

Cíl úlohy: třídění a zobrazování dat pomocí tabulek, obrázkových, sloupcových, kruhových a spojnicových diagramů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	45,5	42,0	48,7
Mezinárodní průměr	27,4	25,9	28,8

Hodnocení

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
20	Všechny tři správně – (50, 90, 60) 50 by mělo končit na správné přímce. 90 by mělo být menší než 100, ale větší než 80. 60 by mělo být menší než 70, ale větší než 50.
<b>Částečně správná odpověď</b>	
10	Kterékoliv dva správně.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	Sloupce zobrazují procenta, ne počty žáků.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	20	10	70	79	99
Četnost [%]	45,5	5,7	11,0	26,5	11,2

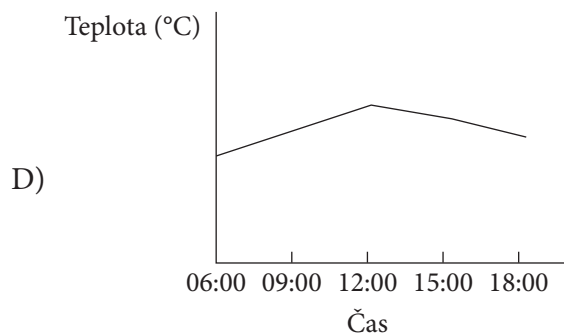
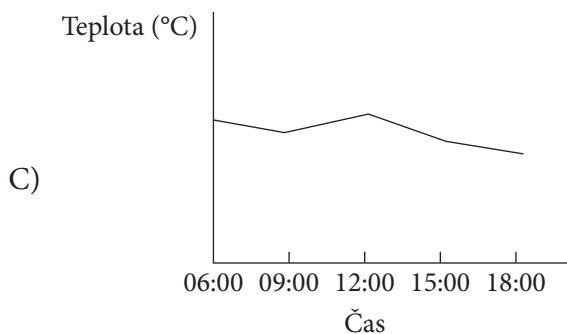
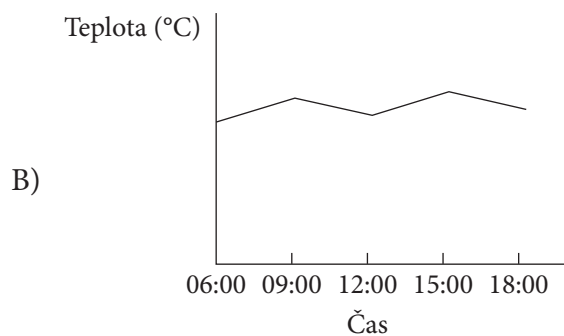
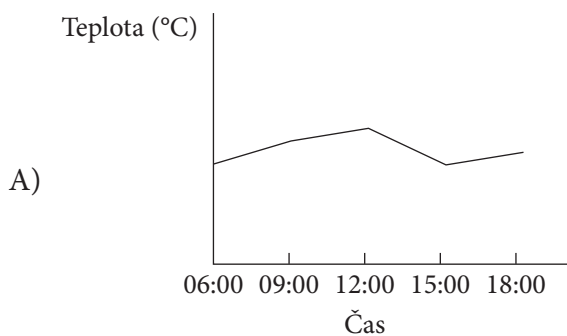
Cílem úlohy je výsledky statistického šetření znázorněné v procentech pomocí kruhového diagramu zaznamenat pomocí diagramu sloupkového. Komplexní úloha aplikačního charakteru, která ověřuje, zda žáci umí číst, resp. znázornit údaje pomocí diagramu a zda umí vypočítat procentovou část, je-li dán základ a počet procent. V úspěšnosti řešení čeští žáci výrazně překonali mezinárodní průměr.

## Úloha M67 (M03-08)

V tabulce jsou uvedeny teploty naměřené v různých hodinách jednoho dne.

Čas	06:00	09:00	12:00	15:00	18:00
Teplota (°C)	12	17	14	18	15

Který z následujících diagramů odpovídá údajům v tabulce? V diagramech není na svislé ose vyznačeno měřítko.



Obsah: uspořádání a znázornění dat

Cíl úlohy: porovnávání a uvádění do souvislosti různých způsobů znázornění stejných dat

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 1

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	91,3	93,7	89,2
Česká republika 2007	88,2	87,9	88,5
Mezinárodní průměr	71,9	73,1	70,8

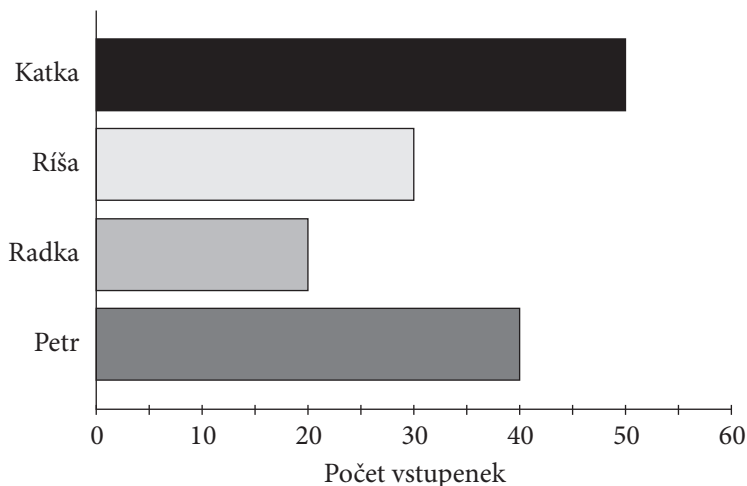
Hodnocení

**Správná odpověď: B**

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	3,2	88,2	3,1	3,4

Žáci mají identifikovat spojnicový diagram, který odpovídá údajům uvedeným v tabulce. Protože v diagramech není vyznačena stupnice na svislé ose teplot, nelze při identifikaci vycházet přímo z naměřených hodnot, ale z tendence mezi danými okamžiky měření. Úloha byla pro žáky 8. ročníku jednoduchá.

### Úloha M68 (M02-13)



Katka, Ríša, Radka a Petr prodávali vstupenky na školní koncert. Diagram zobrazuje počet vstupenek, které každý z nich prodal. Dva lidé dohromady prodali stejný počet vstupenek jako Katka. Kterí to jsou?

Obsah: uspořádání a znázornění dat

Cíl úlohy: čtení dat z tabulek, obrázkových, sloupcových, kruhových a spojnicových diagramů

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	87,2	85,7	88,6
Mezinárodní průměr	63,1	63,3	63,0

Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	Ríša a Radka
	<b>Nesprávná odpověď</b>
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	<b>Bez odpovědi</b>
99	Prázdne

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	10	79	99
Četnost [%]	87,2	9,8	2,9

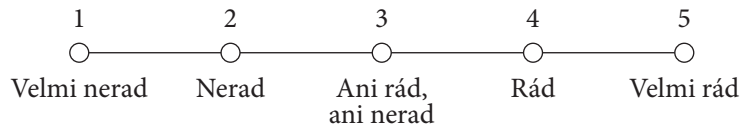
Jednoduchá slovní úloha, v níž mají žáci identifikovat údaje splňující danou podmínku. Údaje jsou zadány pomocí sloupcového diagramu. V řešení úlohy byli čeští žáci velmi úspěšní a o více než 20 % překonali mezinárodní průměr.

## 4.2 INTERPRETACE DAT

### Úloha M69 (M04-12)

#### Oblíbenost předmětů

Skupina 10 žáků chtěla zjistit, zda je v jejich skupině oblíbenější matematika, nebo dějepis. Hodnotili každý předmět podle následující stupnice.



Tabulka ukazuje výsledky:

Žákovské hodnocení

Žák	Matematika	Dějepis
Alan	1	2
Eliška	4	4
Anna	5	4
Jan	2	2
Karel	4	2
Jiřina	3	3
Bedřich	2	1
Klára	1	1
Ivan	5	3
Jaroslav	3	2
<b>Celkem</b>	<b>30</b>	<b>24</b>

A. Vypočti průměrné hodnocení každého předmětu.

Průměrné hodnocení matematiky =

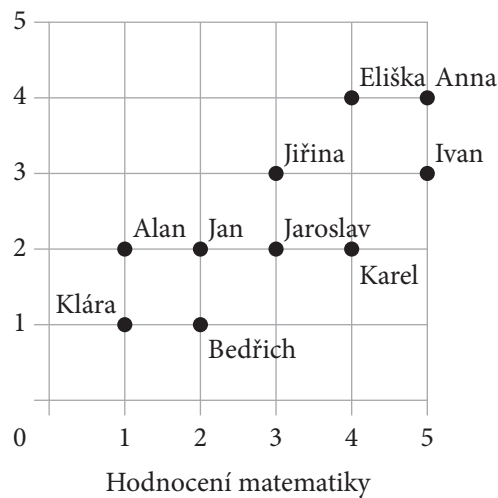
Průměrné hodnocení dějepisu =

Který předmět je podle hodnocení u této skupiny žáků oblíbenější?

Oblíbenější předmět:

- B. Hodnocení předmětů jednotlivými žáky zobrazuje následující graf.  
Například Alanovo jméno je uvedeno vedle jeho hodnocení (matematika 1, dějepis 2).

Hodnocení dějepisu



Napiš „Pravda“, nebo „Nepravda“ na linku za každé z těchto tvrzení:

Všichni žáci ve skupině měli raději matematiku než dějepis. \_\_\_\_\_

Téměř polovina žáků ohodnotila oba předměty stejně. \_\_\_\_\_

Dva žáci zvolili pro oba předměty hodnocení „Ani rád, ani nerad“. \_\_\_\_\_

Obsah: interpretace dat

Cíl úlohy: A rozeznávání, počítání a porovnávání charakteristik datových souborů, zejména průměru, mediánu, rozsahu souboru a tvaru rozložení (obecně)

B využívání a interpretace datových souborů při zodpovídání otázek a řešení úloh

Dovednost: A prokazování znalostí

B uvažování

Obtížnost: A úroveň 3

B úroveň 4

A

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	44,6	42,2	46,9
Mezinárodní průměr	35,5	36,9	34,2

B

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	29,7	29,3	30,1
Mezinárodní průměr	18,7	19,2	18,2

## Hodnocení

A

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	3,0 nebo 3 pro matematiku. 2,4 pro dějepis. Matematika je oblíbenější.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	Správné průměry, žádný předmět neuveden.
71	3,0 pro matematiku, nebo 2,4 pro dějepis, ale ne obojí.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	10	70	71	79	99
Četnost [%]	44,6	0,4	5,6	46,0	3,4

V úloze se ověřuje, zda žáci umí vypočítat aritmetické průměry dvou množin hodnot a správně interpretovat výsledek pomocí dané škály. Zvolený systém hodnocení neumožňuje správný výpočet aritmetických průměrů a chybnou interpretaci výsledku ohodnotit jako odpověď částečně správnou.

B

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
20	Nepravda, Pravda, Nepravda
<b>Částečně správná odpověď</b>	
10	Dvě z odpovědí správně.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	20	10	79	99
Četnost [%]	29,7	32,8	28,8	8,7

V úloze mají žáci rozhodnout, zda tvrzení, která interpretují nasbíraná data, jsou pravdivá, či nikoliv. Při jejím řešení musí žáci prokázat, že umí číst data zobrazená pomocí kartézského grafu, případně zobrazená v tabulce v části A, a umí z nich vybrat ta, která splňují v tvrzení obsaženou podmínku. Vyhodnocení pravdivosti daných tvrzení by bylo jednodušší, pokud by si žáci uvědomili, co to znamená, když bod kartézského grafu leží nad, pod nebo na přímce  $x = y$ . V použitém systému hodnocení nebyla jedna správná odpověď považována za částečně správné řešení, aby se snížil efekt náhodných odpovědí.



### 4.3 PRAVDĚPODOBNOST

#### Úloha M70 (M01-07)

V misce je 36 barevných korálků stejné velikosti; některé jsou modré, jiné zelené, červené nebo žluté. Bez dívání se do misky z ní vybereme jeden korálek. Pravděpodobnost výběru modrého korálku jsou  $\frac{4}{9}$ . Kolik modrých korálků je v misce?

- A) 4 korálky
- B) 8 korálků
- C) 16 korálků
- D) 18 korálků
- E) 20 korálků

Obsah: pravděpodobnost

Cíl úlohy: využívání pravděpodobnosti určitého výsledku k řešení úloh, určování pravděpodobnosti možných výsledků

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	41,8	44,4	38,7
Česká republika 2007	48,1	52,5	44,3
Mezinárodní průměr	45,5	46,0	45,1

Hodnocení

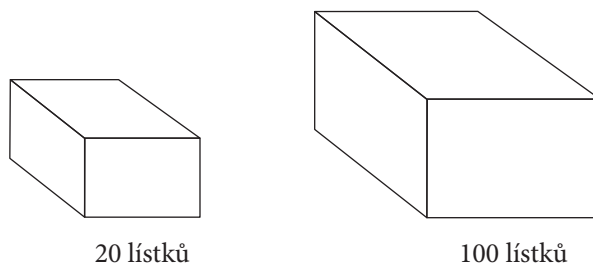
**Správná odpověď:** C

Odpovědi českých žáků					
Odpověď	A	B	C	D	E
Četnost	15,9	18,7	48,1	9,6	1,1

Úloha ověřuje schopnost aplikovat základní poznatky počtu pravděpodobnosti. K jejímu vyřešení postačuje využít definici pravděpodobnosti. Jestliže pravděpodobnost výběru modrého korálku ( $\frac{4}{9}$ ) je dána podílem počtu modrých korálků ( $x$ ) a celkového počtu korálků (36), pak k nalezení řešení stačí pravděpodobnost  $\frac{4}{9}$  vyjádřit v ekvivalentním tvaru se jmenovatelem 36, resp. vyřešit rovnici  $x/36 = 4/9$ . Druhý způsob řešení je založen na následující úvaze: Jestliže pravděpodobnost výběru modrého korálku je  $\frac{4}{9}$ , pak z celkového počtu korálků jsou  $\frac{4}{9}$  korálků modré. Stačí tedy vypočítat  $\frac{4}{9}$  z 36. Ačkoliv výuka základů počtu pravděpodobnosti se na základní školy v České republice vrátila teprve před několika lety, a nemá tedy příliš velkou tradici, byli čeští žáci při řešení této úlohy úspěšní a překonali mezinárodní průměr. Dosáhli také lepšího výsledku než žáci v roce 1999.

## Úloha M71 (M03-02)

V menší krabici je 20 lístků očíslovaných od 1 do 20. Ve větší krabici je 100 lístků očíslovaných od 1 do 100.



Aniž se díváš do krabic, vytáhneš po jednom lístku z každé krabice. Ze které krabice je vytažení lístku s číslem 17 více pravděpodobné?

- A) Z krabice s 20 lístky.
- B) Z krabice se 100 lístky.
- C) Pravděpodobnost je stejná u obou krabic.
- D) Na základě daných údajů není možné rozhodnout.

Obsah: pravděpodobnost

Cíl úlohy: posuzování pravděpodobnosti výskytu určitého jevu

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika 1999	73,5	69,5	77,1
Česká republika 2007	74,4	71,6	77,0
Mezinárodní průměr	59,4	59,1	59,7

Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	74,4	4,2	14,6	6,1

Vyřešení úlohy je založeno na poznatku, že pravděpodobnost daného jevu je nepřímo úměrná počtu jevů možných. Ke správnému výsledku lze ale dospět i bez tohoto poznatku – stačí vypočítat pravděpodobnost jevu v obou případech a výsledky porovnat.

### Úloha M72 (M04-13)

Soňa má sáček, ve kterém je 16 kuliček: 8 červených a 8 černých. Ze sáčku vyndá 2 kuličky a nevrátí je zpátky. Obě kuličky jsou černé. Pak vyndá ze sáčku třetí kuličku. Co může říci o pravděpodobné barvě této třetí kuličky?

- A) Červená je pravděpodobnější než černá.
- B) Černá je pravděpodobnější než červená.
- C) Červená i černá jsou stejně pravděpodobné.
- D) Nelze říci, zda je pravděpodobnější červená, nebo černá.

Obsah: pravděpodobnost

Cíl úlohy: využívání pravděpodobnosti určitého výsledku k řešení úloh, určování pravděpodobnosti možných výsledků

Dovednost: prokazování znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	50,6	41,7	59,4
Mezinárodní průměr	39,2	37,7	40,6

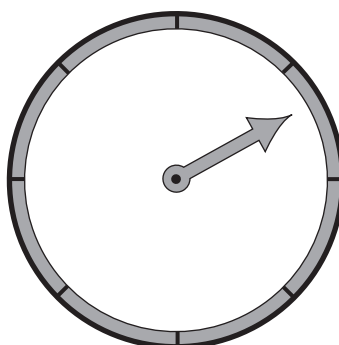
Hodnocení

**Správná odpověď:** A

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	50,6	7,8	10,3	28,3

Úkolem žáků je identifikovat pravdivé tvrzení o pravděpodobnosti dvou jevů. Úlohu lze řešit dvěma způsoby. První spočívá ve výpočtu pravděpodobnosti obou jevů a jejich porovnání. Druhý je založen na úvaze opírající se o definici pravděpodobnosti nebo o empirické zkušenosti žáků, že s větší pravděpodobností bude vytažena ta kulička, kterých je v sáčku více. V úspěšnosti řešení úlohy překonali čeští žáci mezinárodní průměr, přičemž čeští chlapci byli výrazně úspěšnější než dívky.

## Úloha M73 (M07-11)



Radkovo kolo štěstí má tři barevné části – oranžovou, červenou a zelenou. Radek roztočil ručičku 1 000krát. V tabulce je zapsáno, kolikrát se ručička zastavila v každé části.

Barva	Počet zastavení
Oranžová	510
Červená	243
Zelená	247

Odhadni velikosti tří barevných částí a rozděl kolo štěstí nahoře přímkami na tyto části. Jednotlivé části označ: oranžová, červená a zelená.

Obsah: pravděpodobnost

Cíl úlohy: využívání dat z experimentů k předpovídání pravděpodobnosti budoucích výsledků

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	41,8	37,8	45,3
Mezinárodní průměr	27,3	26,5	28,2

Hodnocení

Kód	Odpověď
	<b>Správná odpověď</b>
10	Oranžová část přibližně polovina kruhu, zelená a červená (každá) přibližně jedna čtvrtina kruhu, všechny části správně označeny.
	<b>Nesprávná odpověď</b>
70	Pouze jedna označená část má správnou velikost.
71	Znázorněny tři části, ale žádná nemá správnou velikost.
72	Znázorněny tři části správné velikosti, ale žádná není označena.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).

<b>Bez odpovědi</b>	
<b>99</b>	Prázdné

Odpovědi českých žáků						
Kód odpovědi	<b>10</b>	<b>70</b>	<b>71</b>	<b>72</b>	<b>79</b>	<b>99</b>
Četnost [%]	41,8	12,3	10,2	1,9	9,4	24,4

Při řešení úlohy uplatňují žáci poznatky z oblasti pravděpodobnosti, případně své zkušenosti či logickou úvahu – poměr velikostí barevných částí je přibližně stejný jako poměr četností, resp. pravděpodobností zastavení ručičky v příslušné barevné části. Řešení úlohy tedy odpovídá rozdělení kruhu v poměru na tři části 510:243:247, tj. přibližně v poměru 2:1:1. Při řešení této úlohy měli čeští žáci úspěšnost výrazně vyšší, než je hodnota mezinárodního průměru.

Na závěr zařazujeme komplexní úlohu „Školní výlet“, která se skládá ze čtyř podotázek. Všechny dílčí úkoly vycházejí ze společného námětu, ale vztahují se k různým oblastem učiva a zaměřují se na odlišné dovednosti.

### Úloha M74 (M05-05)

Michal a Katka plánují jednodenní výlet pro svou třídu. Mají v úmyslu zajet si ze své školy v Našincově do jednoho z měst: Zálesí, Zajícov, Brod nebo Medvědín.



Protože učitel řekl, že se musí vrátit ten samý den, třída nemůže jet do města, které je od Našincova dále než 80 km. Z Našincova do Brodu je to právě 80 km. Použij mapu nahoře a doplň tabulku tak, že do prázdných políček napíšeš Ano, nebo Ne.

	Zálesí	Zajícov	Brod	Medvědín
<b>Splňuje podmínku vzdáleno 80 km nebo méně</b>			Ano	

Obsah: geometrické měření

Cíl úlohy: měření, kreslení a odhad délky úseček, obvodů, obsahů a objemů

Dovednost: používání znalostí

Obtížnost: úroveň 2

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	73,1	71,2	75,1
Mezinárodní průměr	54,9	54,8	54,9

Hodnocení

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	Zálesí – Ano; Zajícov – Ne; Medvědí – Ano
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	2 správně
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdne

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	70	79	99
Četnost [%]	73,1	14,0	10,0	2,8

V úloze mají žáci prokázat schopnost odhadem porovnat délku několika úseček s jinou úsečkou, jejíž délka je dána. Aby se snížil efekt náhodných odpovědí, za správné řešení byl považován pouze případ, kdy žák uvedl všechny tři odpovědi správně.

Úloha M75 (M05-06)

Celková cena jízdného pro všechny žáky musí být 500 zedů nebo méně. Ve třídě je 30 žáků. Zde jsou ceny jízdného do jednotlivých měst:

<p><b>Žákovské jízdné do Zálesí nebo Brodu</b></p> <p>Zpáteční jízdenka: 25 zedů</p> <p>Sleva <math>\frac{1}{3}</math> jízdného pro skupiny s 25 a více žáky</p>
--

<p><b>Žákovské jízdné do Zajícova nebo Medvědína</b></p> <p>Zpáteční jízdenka: 20 zedů</p> <p>Sleva 10 % pro skupiny s 15 a více žáky</p>
---

Která města si mohou dovolit navštívit? Napiš postup výpočtu.

Obsah: poměr, úměrnost a procenta

Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 5

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	12,0	12,9	11,0
Mezinárodní průměr	8,1	7,9	8,3

Hodnocení

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
20	Uvádí ceny 500 zedů pro Zálesí a Brod, 540 zedů pro Zajícov a Medvědin, vybírá Zálesí a Brod.
<b>Částečně správná odpověď</b>	
10	Uvádí 500 zedů pro Zálesí a Brod, 540 zedů pro Zajícov a Medvědin, nevybírá Zálesí a Brod.
11	Určuje správnou cenu pro Zálesí a Brod (500 zedů), nebo pro Zajícov a Medvědin (540 zedů), ale ne obě.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
70	Vybírá Zálesí a Brod, ale výpočet není uveden, nebo je nesprávný.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků						
Kód odpovědi	20	10	11	70	79	99
Četnost [%]	12,0	2,1	12,9	9,9	29,5	33,6

Složená slovní úloha, při jejímž řešení musí žáci použít znalosti o přímé úměrnosti a prokázat, že umí pracovat se zlomky a procenty, že dokážou vypočítané hodnoty správně interpretovat a zaznamenat postup výpočtu tak, aby byl srozumitelný pro další osobu. S komplexností úlohy souvisí velmi nízká úspěšnost řešení. V řešení úlohy vynikli žáci asijských států a Švédska, ani ti však zpravidla nepřekročili hodnotu 30 %.



**Úloha M76 (M05-07)**

Učitel dále řekl, že ohledně výletu musí být splněny tři podmínky. Jsou to:

1. Z Našincova musíme odjet v 9:00 nebo později.
2. Do Našincova se musíme vrátit do 17:00.
3. Ve městě, které navštívíme, musíme strávit alespoň 3 hodiny.

Michal a Katka použili autobusové jízdní řády, aby zjistili, zda mohou splnit učitelovy podmínky. Začali zapisovat informace do tabulky dole, ale nedokončili ji.

A. Použij údaje z dále uvedených autobusových jízdních řádů a doplň v tabulce políčka u Zálesí.

B. Použij údaje z dále uvedených autobusových jízdních řádů a doplň v tabulce políčka u Brodu.

Výlet do...	Nejvhodnější příjezdy a odjezdy autobusů					Podmínky učitele		
	Odjezd z Našincova v...	Příjezd do cíle v...	Odjezd nazpět do Našincova v...	Příjezd do Našincova v...	Čas strávený v navštíveném městě	Odjet v 9:00 nebo později	Zůstat alespoň 3 hodiny	Vrátit se do 17:00
Zálesí	9:00	11:15						
Zajícov	9:15	12:20	14:30	17:35	2 hod 10 min	Ano	Ne	Ne
Brod	9:25							
Medvědí	9:10	11:15	14:40	16:45	3 hod 25 min	Ano	Ano	Ano

**Autobusový jízdní řád do Zálesí**

Jízdní řád z Našincova do Zálesí	
Odjezd: Našincov	Příjezd: Zálesí
8:00	10:15
9:00	11:15
10:00	12:15
11:00	13:15
12:00	14:15
13:00	15:15
14:00	16:15
15:00	17:15
16:00	18:15

Jízdní řád ze Zálesí do Našincova	
Odjezd: Zálesí	Příjezd: Našincov
8:30	10:45
9:30	11:45
10:30	12:45
11:30	13:45
12:30	14:45
13:30	15:45
14:30	16:45
15:30	17:45
16:30	18:45

## Autobusový jízdní řád do Brodu

Jízdní řád z Našincova do Brodu	
Odjezd: Našincov	Příjezd: Brod
8:25	10:40
9:25	11:40
10:25	12:40
11:25	13:40
12:25	14:40
13:25	15:40
14:25	16:40
15:25	17:40
16:25	18:40

Jízdní řád z Brodu do Našincova	
Odjezd: Brod	Příjezd: Našincov
8:35	10:50
9:35	11:50
10:35	12:50
11:35	13:50
12:35	14:50
13:35	15:50
14:35	16:50
15:35	17:50
16:35	18:50

C. Která města splňují tři učitelovy podmínky?

Obsah: interpretace dat

Cíl úlohy: využívání a interpretace datových souborů při zodpovídání otázek a řešení úloh

Dovednost: A uvažování

B uvažování

C prokazování znalostí

Obtížnost: A úroveň 4

B úroveň 4

C úroveň 3

A

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	37,5	42,6	32,2
Mezinárodní průměr	15,0	15,3	14,7

B

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	25,0	26,8	23,0
Mezinárodní průměr	11,0	10,8	11,2

C

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	49,6	56,9	42,0
Mezinárodní průměr	29,7	31,4	27,9

Hodnocení

A

Kód	Odpověď												
<b>Správná odpověď</b>													
20	Časy správně: 14:30, 16:45. Strávený čas správně: 3 hodiny 15 minut. „Ano/Ne“ správně: Ano, Ano, Ano.												
<b>Částečně správná odpověď</b>													
10	Vyplněny údaje v tabulce pro Zálesí, některé správně a některé nesprávně nebo v rozporu se zadáním. <table border="1" data-bbox="236 952 1449 1272"> <thead> <tr> <th>Časy</th> <th>Strávený čas</th> <th>Ano/Ne</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Časy správně</td> <td>Neodpovídá časům uvedeným v tabulce</td> <td>Odpovídá časům a strávenému času v tabulce</td> </tr> <tr> <td>Časy nesprávně</td> <td>Odpovídá nesprávným časům v tabulce</td> <td>Odpovídá časům a strávenému času v tabulce</td> </tr> <tr> <td>Časy správně</td> <td>Správně</td> <td>Neodpovídá časům a strávenému času v tabulce</td> </tr> </tbody> </table> <p><i>Příklad:</i> Žák vyplnil časy správně, ale strávený čas vypočetl nesprávně. Následně žák doplnil „Ano/Ne“ v souladu se správnými časy a nesprávným stráveným časem.</p>	Časy	Strávený čas	Ano/Ne	Časy správně	Neodpovídá časům uvedeným v tabulce	Odpovídá časům a strávenému času v tabulce	Časy nesprávně	Odpovídá nesprávným časům v tabulce	Odpovídá časům a strávenému času v tabulce	Časy správně	Správně	Neodpovídá časům a strávenému času v tabulce
Časy	Strávený čas	Ano/Ne											
Časy správně	Neodpovídá časům uvedeným v tabulce	Odpovídá časům a strávenému času v tabulce											
Časy nesprávně	Odpovídá nesprávným časům v tabulce	Odpovídá časům a strávenému času v tabulce											
Časy správně	Správně	Neodpovídá časům a strávenému času v tabulce											
<b>Nesprávná odpověď</b>													
70	Údaje v tabulce jsou doplněny, ale nesplňují kritéria uvedená pro Kód 10.												
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).												
<b>Bez odpovědi</b>													
99	Prázdne												

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	20	10	70	79	99
Četnost [%]	37,5	16,2	15,9	4,9	25,4

B

Kód	Odpověď												
<b>Správná odpověď</b>													
20	Časy správně: 11:40, 14:35, 16:50. Strávený čas: 2 hodiny 55 minut. „Ano/Ne“: Ano, Ne, Ano.												
21	Časy správně: 11:40, 15:35, 17:50. Strávený čas: 3 hodiny 55 minut. „Ano/Ne“: Ano, Ano, Ne.												
<b>Částečně správná odpověď</b>													
10	Vyplněny údaje v tabulce pro Brod, některé správně a některé nesprávně nebo v rozporu se zadáním. <table border="1" data-bbox="236 770 1449 1088"> <thead> <tr> <th>Časy</th> <th>Strávený čas</th> <th>Ano/Ne</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Časy správně</td> <td>Neodpovídá časům uvedeným v tabulce</td> <td>Odpovídá časům a strávenému času v tabulce</td> </tr> <tr> <td>Časy nesprávně</td> <td>Odpovídá nesprávným časům v tabulce</td> <td>Odpovídá časům a strávenému času v tabulce</td> </tr> <tr> <td>Časy správně</td> <td>Správně</td> <td>Neodpovídá časům a strávenému času v tabulce</td> </tr> </tbody> </table> <p><i>Příklad:</i> Žák vyplnil časy správně, ale strávený čas vypočetl nesprávně. Následně žák doplnil „Ano/Ne“ v souladu se správnými časy a nesprávným stráveným časem.</p>	Časy	Strávený čas	Ano/Ne	Časy správně	Neodpovídá časům uvedeným v tabulce	Odpovídá časům a strávenému času v tabulce	Časy nesprávně	Odpovídá nesprávným časům v tabulce	Odpovídá časům a strávenému času v tabulce	Časy správně	Správně	Neodpovídá časům a strávenému času v tabulce
Časy	Strávený čas	Ano/Ne											
Časy správně	Neodpovídá časům uvedeným v tabulce	Odpovídá časům a strávenému času v tabulce											
Časy nesprávně	Odpovídá nesprávným časům v tabulce	Odpovídá časům a strávenému času v tabulce											
Časy správně	Správně	Neodpovídá časům a strávenému času v tabulce											
<b>Nesprávná odpověď</b>													
70	Údaje v tabulce jsou doplněny, ale nesplňují kritéria uvedená pro Kód 10.												
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).												
<b>Bez odpovědi</b>													
99	Prázdné												

Odpovědi českých žáků						
Kód odpovědi	20	21	10	70	79	99
Četnost [%]	20,9	4,1	23,1	21,2	6,0	24,8

Složená slovní úloha s rozsáhlým textem, v níž mají žáci prokázat schopnost pracovat s jízdním řádem, odčítat časové údaje s přechodem přes hodinu a vyhodnocovat splnění daných podmínek. V mezinárodním srovnání měla úloha malou úspěšnost řešení. Naši žáci však spolu s žáky z asijských zemí patřili k nejlepším.

C

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	Uvádí Zálesí a Medvědín.
11	Medvědín a jiné město(a) (ne Zajícov) v souladu s odpověďmi v částech A a B.
<b>Nesprávná odpověď</b>	
79	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	10	11	79	99
Četnost [%]	34,5	15,1	29,6	20,8

Zatímco v částech A a B se vyhodnocuje splnění každé ze tří podmínek zvlášť, v této části úlohy se vyhodnocuje, zda jsou splněny všechny tři podmínky zároveň. Naši žáci spolu s žáky z asijských zemí patřili opět k nejlepším v úspěšnosti řešení.

### Úloha M77 (M05-08)

Pokud vezmeš v úvahu celkovou ujetou vzdálenost, podmínky učitele a cenu výletu, které město může třída navštívit?

Obsah: interpretace dat

Cíl úlohy: využívání a interpretace datových souborů při zodpovídání otázek a řešení úloh

Dovednost: uvažování

Obtížnost: úroveň 3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	34,8	38,1	31,3
Mezinárodní průměr	35,6	37,1	34,2

Hodnocení

Kód	Odpověď
<b>Správná odpověď</b>	
10	Zálesí
11	Jiné město(a) (ne Zajícov) v souladu s předešlými odpověďmi.

<b>Nesprávná odpověď</b>	
<b>79</b>	Nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisajících se zadáním).
<b>Bez odpovědi</b>	
<b>99</b>	Prázdné

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>79</b>	<b>99</b>
Četnost [%]	25,9	8,9	36,9	28,2

Složená slovní úloha, při jejímž řešení musí žáci prokázat schopnost orientovat se v rozsáhlém textu, vyhledat potřebné informace, sdružovat je a rozhodnout, zda splňují několik daných podmínek současně.



## Příloha 1

# Matematické dovednosti

Ke správnému zodpovězení testových otázek potřebují žáci nejen ovládat učivo, které je předmětem výzkumu, ale také uplatnit různé kognitivní dovednosti. Ve výzkumu TIMSS 2007 jsou dovednosti rozděleny do tří oblastí: *prokazování znalostí*, *používání znalostí* a *uvažování*.

První oblast matematických dovedností, *prokazování znalostí*, zahrnuje znalost důležitých faktů, postupů a pojmů. Druhá oblast, *používání znalostí*, se soustředí na schopnost žáků aplikovat příslušné znalosti a pojmy při řešení úloh a zodpovídání otázek. Třetí oblast, *uvažování*, přesahuje řešení rutinních úloh a týká se neznámých situací, složitých kontextů a úloh, jejichž řešení vyžaduje více kroků.

### Prokazování znalostí

Schopnost používat matematiku v situacích vyžadujících matematické uvažování závisí na matematických znalostech a na obeznámenosti s matematickými pojmy. Čím vhodnější vědomosti si žák dokáže vybavit a čím širší je rozsah pojmů, které ovládá, tím větší má možnosti řešit nejrůznější problémové situace a rozvíjet matematické myšlení. Bez základních znalostí umožňujících snadné vybavení si matematického jazyka, faktů a zvyklostí při používání čísel, symbolického vyjadřování a prostorové představitosti by žáci nebyli matematického myšlení schopni.

Kromě znalosti základních faktů a vlastností, které tvoří podstatu matematického myšlení, je důležitá i znalost postupů umožňujících řešit rutinní problémy, zejména ty, s nimiž se lidé setkávají v každodenním životě. Pohotové používání vhodných postupů předpokládá, že si žáci dokážou vybavit řadu kroků a způsob jejich provádění. Žáci musí chápat, že určité postupy lze používat nejen k řešení jednotlivých úloh, ale celých tříd úloh.

Konečně znalost pojmů žákům umožňuje vytvářet spojení mezi jednotlivými poznatky, které by jinak zůstaly izolovanými fakty. Díky tomu mohou rozšiřovat své dosavadní znalosti, posuzovat věrohodnost matematických výroků a metod a vytvářet matematické modely. Do oblasti *prokazování znalostí* byly zařazeny následující dovednosti: vybavování, rozpoznávání, počítání, získávání informací, měření, třídění a uspořádávání.

### Používání znalostí

V úlohách souvisejících s tímto typem dovedností musí žáci aplikovat své znalosti faktů, postupů či porozumění matematickým pojmům při vytváření modelů a řešení úloh. Zasazení problému do kontextu je zde rutinnější než v úlohách zaměřených na uvažování. Úlohy jsou zpravidla podobné těm, s nimiž se žáci setkávají v učebnicích při procvičování jednotlivých postupů, ačkoli některé z nich budou formulovány tak, aby navozovaly situace ze skutečného života. Navzdory rozdílné obtížnosti použitých úloh se očekává, že všechny budou pro žáky dostatečně známé a žáci při jejich řešení pouze zvolí a uplatní naučené postupy.

Oblast *používání znalostí* zahrnuje následující dovednosti: vybírání, vyjadřování, modelování, provádění, řešení rutinních problémů.

### Uvažování

Matematické uvažování vyžaduje schopnost logického, systematického myšlení. Zahrnuje však také intuitivní a induktivní uvažování vycházející z modelů a pravidelností, které lze využít při řešení nerutinních problémů. Nerutinní problémy kladou na kognitivní dovednosti žáků vyšší nároky, i když znalosti a dovednosti potřebné k jejich řešení byly probrány. Vyžadují přenos znalostí a dovedností do nových situací a většinou i kombinování různých způsobů uvažování. Řešení se často skládá z několika kroků a může vyžadovat aplikaci znalostí z různých oborů matematiky.



Jelikož dovednosti náležející do oblasti *uvažování* lze využít při promýšlení a řešení neobvyklých a složitých problémů, představuje každá z nich významný výstup matematického vzdělávání a může ovlivnit žákovo myšlení obecně, nejen v kontextu matematiky.

Do oblasti *uvažování* patří následující dovednosti: analyzování, zobecňování, syntetizování/propojování, zdůvodňování.

## Příloha 2

# Popis vědomostních úrovní v matematice

### Čtvrtá (nejvyšší) vědomostní úroveň<sup>4</sup>

*Žáci umí třídit informace a vyvozovat z nich závěry, zobecňovat a řešit složité problémy.*

**Žáci jsou schopni řešit různé problémy týkající se poměru, úměry a procent.** Například vyberou dva ekvivalentní poměry a určí poměr dvou částí celku. Z daného čísla a poměru jeho dvou částí dokážou žáci určit velikost těchto částí. Na základě rozměrů dvou obdélníků určí poměr jejich obsahů. Dokážou vypočítat slevu v procentech. V abstraktních situacích aplikují své znalosti zlomků. Například pro dva zlomky na číselné ose určí bod, který znázorňuje jejich součin.

**Žáci prokážou, že umí používat algebraické výrazy. Zobecnění dokážou formulovat algebraicky i slovně.** Dokážou například vyjádřit  $n$ -tý člen v číselné řadě. Vyberou algebraické výrazy, které modelují situace ze slovních úloh. Dovedou sečíst tři algebraické výrazy s různým číselným jmenovatelem, odečíst výrazy a určit součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel, znají-li prostřední číslo v obecném tvaru.

**Žáci dokážou řešit řadu rozličných úloh obsahujících rovnice, vzorce a funkce.** Například vyřeší lineární nerovnici se zlomky, vyčíslí vzorce, vyřeší lineární rovnici se zápornými členy, sestaví rovnici popisující daný problém. Určí lineární rovnici se dvěma neznámými, je-li dáno její řešení.

**Při řešení úloh, které vyžadují více než jeden krok, dokážou žáci kombinovat znalosti o geometrických útvech.** Mezi ně patří znalosti o rovnoběžkách, o podobných trojúhelnících, o součtu velikostí úhlů v trojúhelníku, o vnitřních a vnějších úhlech a o ose úhlu. Žáci dokážou určit dvojici shodných navzájem pootočených těles.

**Žáci také užívají své znalosti o geometrických útvech při řešení rozmanitých úloh zaměřených na obsah a určení rozměrů.** Například dokážou určit obsah trojúhelníku vepsaného do čtverce a obsah lichoběžníku vepsaného do obdélníku. Při určování obsahu trojúhelníku a obvodu lichoběžníku používají Pythagorovu větu. Narýsují nový obdélník odvozený od daného obdélníku a určí jeho obsah. Při řešení problémů užívají znalosti výpočtu obsahu kruhu. Při určování vzdálenosti dokážou žáci zkombinovat informace o délce jednotlivých úseků na přímce.

**Žáci dovedou získávat a využívat data z různých zdrojů a použít je při řešení složitých problémů.** Dokážou odvodit závěry ze zadaných dat. Prokážou porozumění významu průměru a dokážou určit medián. Data z tabulek a diagramů dokážou interpolovat a extrapolovat.

<sup>4</sup> Některé úlohy se ukázaly být velmi obtížné, správně je vyřešilo příliš malé procento žáků. Obtížnost těchto úloh je v publikaci vyjádřena úrovní 5.

## Třetí vědomostní úroveň

*Žáci využívají své znalosti a dovednosti v různých poměrně složitých situacích.*

**Žáci dovedou řešit poměrně složité problémy týkající se úměrnosti a procent. Dokážou vzájemně porovnat a převést zlomky, desetinná čísla a procenta.** Dovedou počítat se zlomky a se zápornými celými čísly. Žáci prokážou porozumění různým měřítkům, číselným osám a mocninám. Dané číslo dokážou rozložit na prvočinitele.

**Žáci dovedou řešit jednoduché algebraické problémy.** Dokážou rozšířit řady čísel nebo geometrických obrazců a určit následující členy. Dále dokážou zjednodušit algebraické výrazy, určit ekvivalentní výrazy a vypočítat hodnotu výrazu se závorkami a zápornými členy. Žáci dovedou určit algebraický výraz, který vyjadřuje jednoduchou situaci, umí sčítat algebraické výrazy a určit součin dvou mocninných algebraických výrazů obsahujících jednu proměnnou.

**Žáci dovedou řešit lineární rovnice o jedné neznámé, najít řešení soustavy dvou lineárních rovnic a určit hodnoty, které splňují dvě nerovnice.** Dokážou určit lineární funkci na základě jejího grafu nebo z tabulky uspořádaných dvojic čísel. Dokážou vypočítat hodnotu proměnné ze vzorce.

**Žáci řeší problémy zahrnující obvod, obsah a objem.** Například dokážou určit obvod čtverce, je-li znám jeho obsah, či určit obsah nepravidelného obrazce složeného z obdélníků. Žáci dovedou určit počet krychliček potřebných pro vyplnění otvoru v daném útvaru, poznat síť krychle a vypočítat objem kvádru, pokud je dána jeho síť.

**Při řešení úloh týkajících se velikosti úhlů využívají žáci své znalosti vlastností přímk, úhlů a trojúhelníků.** Žáci dokážou narýsovat úhel dané velikosti. Znají otáčení a osovou souměrnost, představí si obrazec vystřižený z přeloženého papíru a dokreslí chybějící polovinu symetrického obrazce.

**Žáci řeší jednoduché úlohy ze statistiky a pravděpodobnosti.** Dokážou vypočítat průměr.

**Žáci dokážou číst data ze sloupcových, kruhových a spojnicových diagramů, interpretovat je a použít při řešení problémů.** Pro zadané údaje dokážou sestavit kruhový diagram. Dokážou porovnat a spojit několik souborů dat a vybrat údaje, které splňují požadované podmínky.

## Druhá vědomostní úroveň

*Žáci dokážou aplikovat základní matematické znalosti na jednoduché situace.*

**Žáci používají základní matematické znalosti při řešení jednoduchých úloh.** Například řeší slovní úlohy, které vyžadují sčítání a násobení desetinných čísel. Dokážou určit ekvivalentní poměry a úměrnosti. Žáci chápou, že celek je 100 %, a dokážou odhadnout množství, které zbude po snížení o daný počet procent. Znají jednoduché mocniny a počítají se zápornými celými čísly.

**Žáci prokážou určité porozumění desetinným číslům a zlomkům.** Například dovedou řešit slovní úlohy s desetinnými čísly. Zaokrouhlí desetinné číslo řádu setin na celé číslo. Ze skupiny běžně užívaných zlomků vyberou zlomek nejmenší. Určí kruh, ve kterém je znázorněn stejný zlomek, který je vyznačen v obdélníku.

**Žáci na této úrovni znají význam jednoduchých algebraických výrazů a mají určité znalosti o lineárních rovnicích.** Dokážou rozšířit řadu čísel o několik následujících členů.

**Při řešení úloh o trojúhelnících žáci používají základní vlastnosti geometrických útvarů.** Například dokážou narýsovat trojúhelník o obsahu dvakrát větším, než je obsah zadaného obdélníku. Dokážou určit body požadovaných vlastností ve čtvercové síti, dokončit dvourozměrný náčrtek trojrozměrného útvaru.

**Žáci dokážou číst data z tabulek, sloupcových, kruhových a spojnicových diagramů a interpretovat je.** Například vyberou kruhový diagram, který znázorňuje data z tabulky procent. Ze dvou zadaných spojnicových diagramů vyberou ten, který modeluje situaci vyjádřenou slovně, a dále dokážou interpretovat grafy a jejich průsečík využít při řešení úlohy. Žáci mají základní představu o náhodnosti jevu.

## První vědomostní úroveň

*Žáci mají určité znalosti o přirozených a desetinných číslech, o operacích s nimi a o základních diagramech.*

Několik málo úloh na této úrovni zjišťuje **základní porozumění přirozeným a desetinným číslům včetně početních operací.**

Žáci dokážou vybrat sloupcový nebo spojnicový diagram, který zobrazuje daný soubor dat, a **dokážou doplnit jednoduchý sloupcový diagram.**

# **Výzkum TIMSS 2007**

## **Úlohy z matematiky pro 8. ročník**

Zpracovali: RNDr. Miloslav Frýzek, RNDr. Jana Palečková, Dana Švejdová, Vladislav Tomášek,  
Mgr. Martina Vernerová

Recenzovali: Mgr. Jitka Baslová, Mgr. Jiří Brant

První vydání.

Vydal: Ústav pro informace ve vzdělávání, Senovážné nám. 26, Praha 1,  
v roce 2009 v nákladu 1000 výtisků.

Jazyková redakce: ÚIV – Divize informací a služeb.

Obálka: Grafické studio RedGreenBlue, MgA. Jana Štěpánová.

Grafická úprava, sazba a tisk: ÚIV – divize Nakladatelství TAURIS.

[www.uiv.cz](http://www.uiv.cz)

ISBN 978-80-211-0591-1