



Česká školní
inspekce

Mezinárodní šetření PISA 2022 Koncepční rámec

MATEMATIKA | TVŮRČÍ MYŠLENÍ



2022

2023



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Mezinárodní šetření PISA 2022 – koncepční rámec

Matematika | Tvůrčí myšlení

Mezinárodní šetření PISA 2022 pořádá:

Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (OECD)

Tento dokument si klade za cíl představit pojetí hodnocení matematiky a tvůrčího myšlení v mezinárodním šetření PISA 2022. Jedná se o zkrácenou verzi anglického originálu koncepčních rámců.

Matematická gramotnost je hlavní testovanou oblastí v cyklu PISA 2022. Tvůrčí myšlení je pro šetření PISA tzv. inovativní doménou, která je v cyklu PISA 2022 zařazena poprvé.

Českou verzi koncepčních rámců PISA 2022 připravili Mgr. Simona Boudová, Vladislav Tomášek, PhDr. Libor Klement, MBA ve spolupráci s MEDIA MARKET s.r.o.

Tato publikace byla vydána jako plánovaný výstup projektu Komplexní systém hodnocení spolufinancovaného Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

© Česká školní inspekce, Praha 2022

ISBN 978-80-88492-04-7 (online ; pdf)




OBSAH

MATEMATIKA	5
1 ÚVOD	8
2 DEFINICE MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI	10
2.1 POJETÍ MATEMATICKY GRAMOTNÉHO JEDINCE V RÁMCI ŠETŘENÍ PISA 2022	10
2.2 PROPOJENÍ ÚLOH S RŮZNÝMI KONTEXTY PISA 2022	13
2.3 ROLE MATEMATICKÝCH NÁSTROJŮ VČETNĚ TECHNOLOGIÍ V PISA 2022	13
3 USPOŘÁDÁNÍ MATEMATICKÉ DOMÉNY	16
3.1 MATEMATICKÉ UVAŽOVÁNÍ A POSTUPY ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ	16
3.1.1 MATEMATICKÉ UVAŽOVÁNÍ	16
3.2 ZNALOSTI MATEMATICKÉHO OBSAHU	21
3.2.1 ZMĚNA A VZTAHY	21
3.2.2 PROSTOR A TVAR	22
3.2.3 KVANTITA	22
3.2.4 NEURČITOST A DATA	23
3.3 KONTEXTY TESTOVÝCH ÚLOH A VYBRANÉ DOVEDNOSTI PRO 21. STOLETÍ	25
3.3.1 KONTEXTY	25
3.3.2 DOVEDNOSTI PRO 21. STOLETÍ	26
4 HODNOCENÍ MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI	28
4.1 USPOŘÁDÁNÍ MATEMATICKÉ ČÁSTI ŠETŘENÍ PISA 2022	28
4.2 ROZLOŽENÍ BODOVÉHO SKÓRE V OBLASTI MATEMATICKÉHO UVAŽOVÁNÍ A PROCESU ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ	28
4.3 ROZLOŽENÍ BODOVÉHO SKÓRE PODLE OBSAHOVÝCH KATEGORIÍ	28
4.4 ROZPĚTÍ OBTÍŽNOSTI ÚLOH	29
4.5 POČÍTAČOVÉ TESTOVÁNÍ MATEMATIKY	29
4.6 DESIGN MATEMATICKÝCH ÚLOH ŠETŘENÍ PISA 2022	30
4.7 VYHODNOCOVÁNÍ POLOŽEK	30
4.8 GRAMOTNOSTNÍ ÚROVNĚ V MATEMATICE	31
4.9 MATEMATICKÁ GRAMOTNOST A KONTEXTUÁLNÍ DOTAZNÍKY	31
PŘÍLOHA A PŘÍKLADY UKÁZKOVÝCH ÚLOH PRO HODNOCENÍ MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI V PISA 2022	34
SMARTPHONE USE	34
THE BEAUTY OF POWER	37
ALWAYS SOMETIMES NEVER	39

TVŮRČÍ MYŠLENÍ.....	41
1 ÚVOD	44
2 DEFINICE TESTOVANÉ DOMÉNY.....	46
3 POROZUMĚNÍ TVŮRČÍMU MYŠLENÍ A JEHO HODNOCENÍ VE TŘÍDĚ	48
4 KONCEPCE HODNOCENÍ TVŮRČÍHO MYŠLENÍ V PISA 2022.....	52
4.1 OBLASTI HODNOCENÍ TVŮRČÍHO MYŠLENÍ V PISA 2022.....	52
4.1.1 PÍSEMNÝ PROJEV	52
4.1.2 GRAFICKÝ PROJEV	53
4.1.3 ŘEŠENÍ SPOLEČENSKÝCH PROBLÉMŮ	53
4.1.4 ŘEŠENÍ VĚDECKÝCH PROBLÉMŮ	53
4.2 ASPEKTY HODNOCENÍ TVŮRČÍHO MYŠLENÍ V PISA 2022.....	54
4.2.1 VYTVÁŘENÍ RŮZNÝCH NÁVRHŮ	54
4.2.2 VYTVÁŘENÍ KREATIVNÍCH NÁVRHŮ	54
4.2.3 POSUZOVÁNÍ A VYLEPŠOVÁNÍ NÁVRHŮ	55
4.3 KOMPETENČNÍ MODEL TVŮRČÍHO MYŠLENÍ	55
5 ROZVRŽENÍ ÚLOH A FORMÁT (DRUHY) ODPOVĚDÍ V KOGNITIVNÍM TESTU.....	60
5.1 DRUHY ODPOVĚDÍ	60
PŘÍLOHA B PŘÍKLAD UKÁZKOVÉ ÚLOHY PRO HODNOCENÍ TVŮRČÍHO MYŠLENÍ V PISA 2022	62

MATEMATIKA



A decorative horizontal bar consisting of a long grey rectangle on the left and a shorter grey rectangle on the right, with a large, outlined number '1' centered between them.

1

Úvod

1 ÚVOD

Hodnocení výsledků v matematice má v šetření PISA 2022 zásadní význam, protože se matematika znovu stává hlavní hodnocenou oblastí. Výsledky v matematice byly hodnoceny již v šetřeních PISA 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015 a 2018, ale ústřední roli hrála matematika pouze v letech 2003 a 2012.

Návrat matematiky na pozici hlavní testované oblasti v šetření PISA 2022 umožňuje nejen porovnávat vývoj výsledků žáků v průběhu času, ale zároveň nabízí možnost znovu zjišťovat a zvážit, co přesně by se mělo hodnotit ve světle změn, k nimž došlo ve světě, v tomto oboru i ve vzdělávací politice a vyučovací praxi.

Koncepce PISA 2022 je navržena tak, aby se matematika stala pro patnáctileté žáky jasnější, srozumitelnější a zároveň aby testovací úlohy vycházely ze smysluplných a autentických kontextů. Cyklus matematického modelování, který byl používán v předchozích koncepcích (např. OECD, 2004, 2013) pro popis jednotlivých fází, jimiž žáci procházejí při řešení kontextových úloh, zůstává základním stavebním kamenem i v šetření PISA 2022. Využívá se také pro vymezení matematických postupů, které žáci volí při řešení úloh – postupů, jež společně s matematickým uvažováním (deduktivním i induktivním) poskytují základní dimenze prezentace výsledků šetření.

Primárním způsobem hodnocení matematické gramotnosti v rámci šetření PISA 2022 bude počítačové testování matematiky (computer-based assessment of mathematics – CBAM).

Matematický koncepční rámec PISA 2022 je rozdělen do tří hlavních částí. V první části „Definice matematické gramotnosti“ jsou vysvětlena teoretická východiska matematického testování PISA, a to včetně formální definice konstruktů *matematické gramotnosti*. Druhá část „Uspořádání matematické domény“ popisuje čtyři aspekty: a) matematické uvažování a tři matematické *postupy* (z cyklu modelování a řešení problému); b) způsob, jak jsou v koncepci PISA 2022 uspořádány znalosti matematického *obsahu* a znalosti, které se testují u patnáctiletých žáků; c) vztah mezi matematickou gramotností a tzv. *dovednostmi 21. století* a d) *kontexty*, z nichž budou úlohy vycházet. Třetí část „Hodnocení matematické gramotnosti“ uvádí přehled uspořádání testů a další technické informace.

Pro zajištění kontinuity měření bude většina úloh v šetření PISA 2022 stejná jako v předchozích cyklech PISA.

Koncepční rámec byl vytvořen pod vedením Matematické expertní skupiny pro rok 2022 (Mathematics Expert Group [MEG]), která byla jmenována kontraktorem PISA pro matematickou koncepci (RTI International), v konzultaci s řídicím výborem PISA (PISA Governing Board [PGB]).

A decorative horizontal bar consisting of a long grey rectangle on the left, a large white number '2' with a thin black outline in the center, and a shorter grey rectangle on the right.

2

Definice matematické gramotnosti

2 DEFINICE MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI

Má-li být mladý člověk připraven na život v moderní společnosti a má-li být pro ni přínosným, je pro něj znalost matematiky zásadní. Neustále roste počet problémů a situací z běžného i pracovního života, pro jejichž pochopení a řešení je nezbytná jistá úroveň matematických znalostí. Matematika je klíčovým nástrojem, který mladí lidé potřebují, mají-li zvládat širokou škálu výzev a problémů v nejrůznějších oblastech života.

Musíme proto porozumět tomu, jak efektivně umějí absolventi škol používat matematiku v úvahách o svém životě, při plánování své budoucnosti a při posuzování a řešení smysluplných problémů souvisejících s řadou důležitých otázek jejich života. Testování patnáctiletých žáků je pro jednotlivé země včasným indikátorem toho, jak mohou lidé v dalším životě reagovat na různorodou škálu situací, jejichž pochopení vyžaduje aplikaci matematiky a závisí na matematickém uvažování (deduktivním i induktivním) a řešení problémů.

Základem koncepce mezinárodního hodnocení patnáctiletých žáků by měla být následující otázka: „Co potřebují občané znát a umět v situacích, jež obsahují matematiku?“ Konkrétněji: co přesně obnáší matematické kompetence u patnáctiletých žáků, kteří vycházejí ze školy nebo se připravují na specializovanější druh vzdělávání či přijetí na vysokou školu? Je důležité, aby konstrukt matematické gramotnosti, který se používá v tomto šetření k označení *schopnosti jednotlivce matematicky myslet a řešit problémy v různých kontextech 21. století*, nebyl vnímán jako synonymum pro minimální nebo nízkou úroveň znalostí a dovedností. Má spíš definovat schopnost jednotlivce *matematicky uvažovat a používat matematické pojmy, postupy, fakta a nástroje k popisu, vysvětlování a předpovídání různých jevů*. Takové pojetí matematické gramotnosti bere v úvahu význam řádného pochopení mnoha matematických pojmů a postupů i užitek, jaký žákům přináší prozkoumávání reálného světa s podporou matematiky. Pojem matematické gramotnosti, jak je vymezen v koncepčním rámci PISA, klade velký důraz na potřebu rozvíjení schopnosti žáků používat matematiku v kontextu. K dosažení tohoto cíle je důležité, aby žáci získali bohaté zkušenosti v hodinách matematiky, což platí jak pro ty patnáctileté žáky, jejichž formální matematické vzdělání je téměř u konce, tak pro ty, kteří v něm budou pokračovat.

Při hodnocení matematické gramotnosti patnáctiletých žáků je třeba brát v potaz příslušná specifika těchto žáků. Je tedy nezbytné zvolit věkově přiměřený obsah, jazyk a kontexty. Tento koncepční rámec rozlišuje mezi širokými tematickými okruhy, které jsou důležité pro matematicky gramotné jedince obecně, a specifickými tématy vhodnými právě pro patnáctileté žáky. Matematická gramotnost není vlastnost, již někdo má, nebo nemá, musíme spíš hovořit o kontinuu více, či méně matematicky gramotných jedinců, přičemž všichni mají potenciál nadále se zlepšovat.

PISA 2022 definuje matematickou gramotnost takto:

Matematická gramotnost je schopnost jedince matematicky uvažovat a formulovat, používat a interpretovat matematiku při řešení problémů v různých kontextech každodenního života. Zahrnuje používání matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů k popisu, vysvětlování a předpovídání jevů. Pomáhá jedinci uvědomit si úlohu matematiky ve světě a díky tomu odpovědně usuzovat a rozhodovat se jako tvořivý, angažovaný a přemýšlivý občan 21. století.

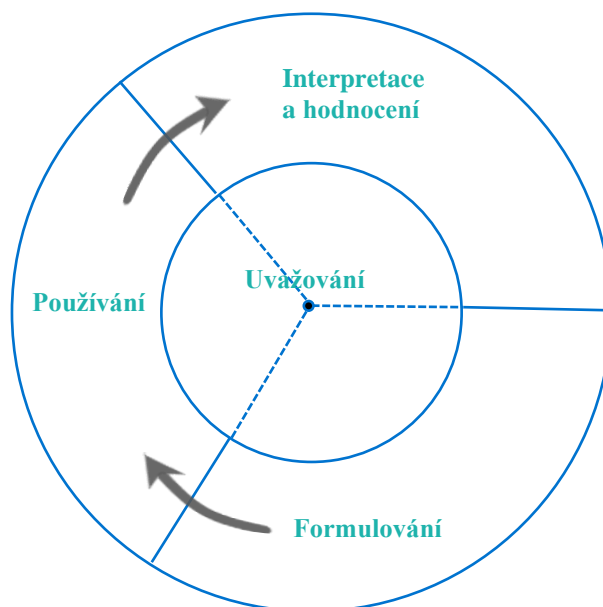
Porovnání s koncepcemi PISA 2003 a 2012 ukazuje, že koncepce PISA 2022 sice hodnotí a zachovává základní pojmy matematické gramotnosti, které jsou v nich uvedeny, ale zároveň zohledňuje řadu změn, k nimž došlo ve světě patnáctiletých žáků a které naznačují posun ve způsobu hodnocení matematické gramotnosti oproti přístupům používaným v předchozích cyklech. Tento trend se projevuje v posunu od nutnosti provádět základní výpočty k rychle se měnícímu světu řízenému novými technologiemi a trendy, v nichž tvořiví a angažovaní lidé provádějí rozhodnutí nejen sami o sobě, ale také o společnosti, v níž žijí.

2.1 Pojetí matematicky gramotného jedince v rámci šetření PISA 2022

Výrazové prostředky použité v definici matematické gramotnosti kladou důraz na aktivní používání matematiky při řešení problémů reálného světa v různých kontextech a zahrnují matematické uvažování

(deduktivní i induktivní) a řešení problémů s použitím matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů pro popisování, vysvětlování a předpovídání jevů.

OBRÁZEK 1 | Matematická gramotnost: vztah mezi matematickým uvažováním a cyklem řešení problému

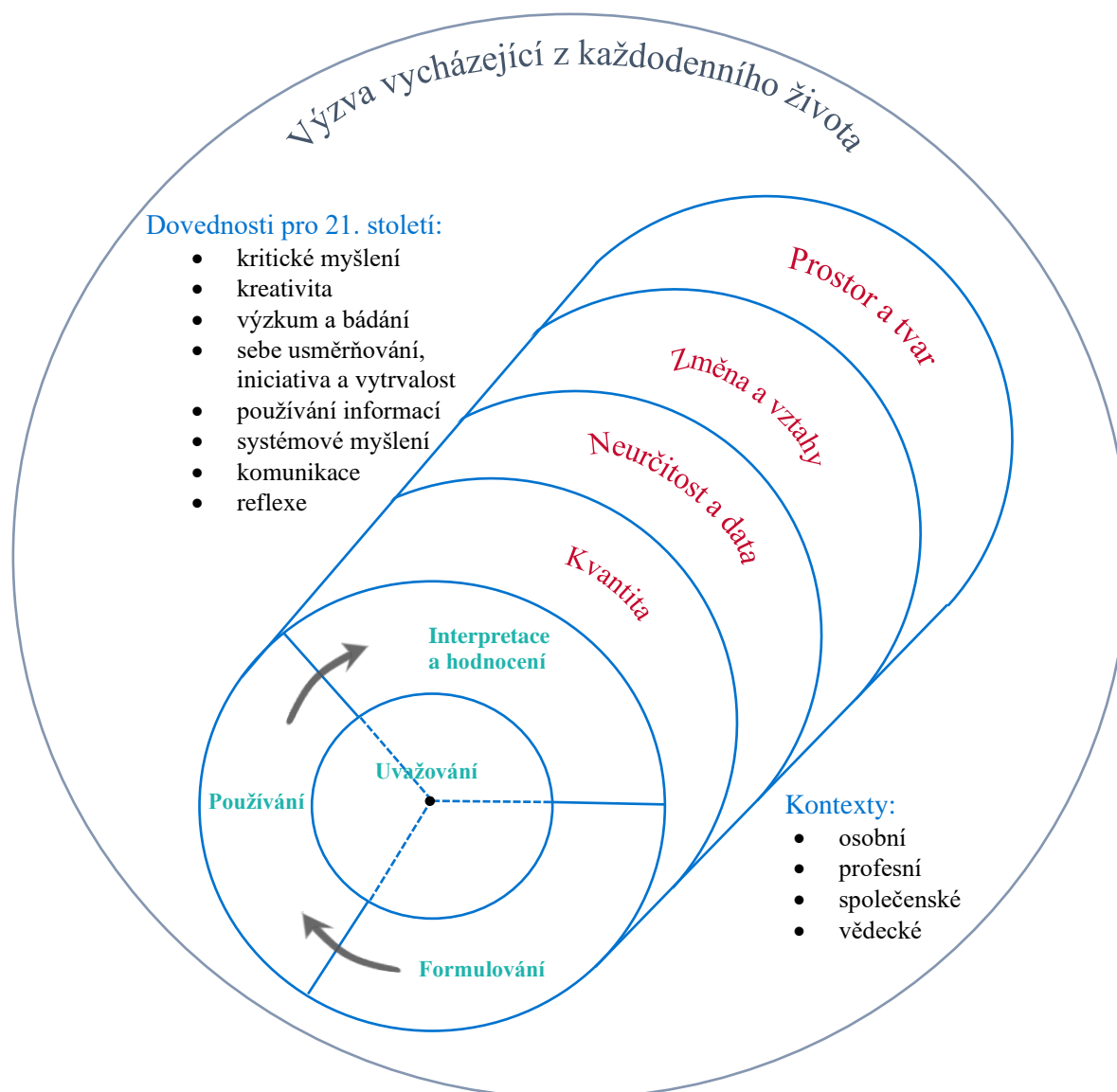


Aby byli jedinci matematicky gramotní, musí žáci především umět používat znalost matematického obsahu k rozpoznání matematické povahy dané situace (problému), zejména takových situací, s nimiž se střetávají v každodenním životě, a poté takovou situaci nebo problém formulovat pomocí matematických pojmů. Tento převod nejednoznačné, neuspořádané situace v každodenním životě na řádně definovaný matematický problém vyžaduje matematické uvažování. Jakmile je tento proces řádně dokončen, musí být výsledný matematický problém vyřešen pomocí matematických pojmů, algoritmů a postupů, jimž se žáci ve škole naučili. Může to však rovněž vyžadovat strategická rozhodnutí o výběru těchto nástrojů a o pořadí jejich použití, což je také projev matematického uvažování. A konečně nám definice PISA připomíná, že žáci musí zhodnotit své matematické řešení pomocí interpretace výsledků v rámci původní reálné situace. Žáci by navíc měli mít početní dovednosti a měli by je umět uplatňovat při řešení problémů. K těmto dovednostem, užívaným při formulování, používání, hodnocení a uvažování, patří rozpoznávání vzorců, jejich rozkládání, určování matematických nástrojů (použijeme-li vůbec nějaké), které lze využít k analýze nebo řešení problému, a stanovení algoritmů jako součásti podrobného řešení.

Matematická gramotnost tedy obsahuje dva související aspekty: *matematické uvažování a řešení problémů*. *Matematická gramotnost* sehrává důležitou úlohu při zajišťování schopnosti používat matematiku při *řešení problémů každodenního života*. Matematické uvažování (deduktivní i induktivní) navíc překračuje rámec řešení problémů každodenního života, protože umožňuje rovněž informovaně posuzovat důležité rodinné nebo společenské problémy, které lze řešit s pomocí matematiky. Zahrnuje také možnost posuzovat platnost informací, jež jednotlivce zahlcují, a to zvažováním jejich kvantitativních a logických důsledků. A právě zde je matematické uvažování rovněž přínosné pro rozvoj vybraného souboru dovedností pro 21. století.

Vnější kružnice znázorněná na obrázku 2 naznačuje, že matematická gramotnost má své místo v souvislosti s výzvami nebo problémy vznikajícími v každodenním životě.

OBRÁZEK 2 | PISA 2022: vztah mezi matematickým uvažováním, cyklem řešení problémů (modelováním), matematickým obsahem, kontextem a vybranými dovednostmi 21. století



Obrázek 2 rovněž názorně ukazuje vztah mezi matematickou gramotností (jak je znázorněna na obrázku 1) a jednotlivými oblastmi matematických obsahů, v nichž se matematická gramotnost využívá; dále kontexty problémů i vybrané dovednosti pro 21. století, které samy podporují matematickou gramotnost a zároveň jsou jejím prostřednictvím rozvíjeny.

K těmto kategoriím matematického obsahu patří: kvantita, neurčitost a data, změna a vztahy, prostor a tvary. A právě z těchto kategorií znalostí matematického obsahu musí žáci čerpat při uvažování, formulaci problémů (transformaci situace z každodenního života na matematický problém), při řešení již formulovaného matematického problému a při interpretaci a hodnocení stanoveného řešení.

Stejně jako u předchozích koncepcí používá šetření PISA k definování situací z každodenního života nadále čtyři kontextové okruhy: osobní, profesní, společenský a vědecký. Kontext může mít osobní povahu a může souviset s problémy nebo výzvami, s nimiž se střetává jedinec, jeho rodina nebo skupina vrstevníků. Může se jednat o kontext společenský (v rámci lokálního, národního nebo globálního společenství jedince), profesní (soustředění na svět práce) nebo vědecký (který souvisí s aplikací matematiky v přírodním a technologickém světě).

Poprvé jsou v šetření matematické gramotnosti PISA 2022 (viz obrázek 2) zahrnuty dovednosti pro 21. století, o něž se matematická gramotnost opírá a které zároveň rozvíjí.

Ačkoli je uvedený cyklus modelování (formulování, používání, interpretace a hodnocení) klíčovým aspektem pojetí matematické gramotnosti, není vždy nezbytné, aby žák prošel všemi jeho fázemi, zejména v souvislosti s testováním.¹ Mnoho úloh šetření PISA se týká pouze částí tohoto cyklu.

2.2 Propojení úloh s různými kontexty PISA 2022

„Různorodost kontextů každodenního života“ zmíněná v definici matematické gramotnosti odkazuje na skutečnost, že občan 21. století je příjemcem kvantitativních a někdy i statistických informací. Tento odkaz je pojitkem ke specifickým kontextům, které budou blíže popsány a ilustrovány v dalším textu. Specifické kontexty samy o sobě významnou roli nehrají, ale čtyři okruhy kontextů zvolené pro toto testování (osobní, profesní, společenský a vědecký) v sobě zahrnují celou řadu situací, v nichž se lidé mohou s matematikou setkat. Definice také uvádí, že matematická gramotnost pomáhá uvědomit si roli matematiky ve světě a činit odpovědná rozhodnutí, která lze očekávat od tvořivých, angažovaných a přemýšlivých občanů, střetávají-li se s tvrzeními a argumenty typu: „studie zjistila, že v průměru...“; „průzkum ukazuje značný pokles...“; „někteří vědci tvrdí, že populace bude během x let růst rychleji než produkce potravin...“; apod.

2.3 Role matematických nástrojů včetně technologií v PISA 2022

Definice matematické gramotnosti explicitně hovoří o používání matematických nástrojů. Ty tvoří fyzické a digitální vybavení, software a výpočetní technika. Počítačové matematické nástroje jsou ve 21. století na pracovištích zcela běžné a jejich význam a dostupnost v práci i ve společnosti budou nadále stoupat. Obtížnost problémů v každodenním životě i pracovní praxi a nároky na schopnost matematického uvažování jednotlivců (deduktivního i induktivního), kdy jsou k dispozici matematické nástroje, se zvyšují spolu s těmito novými příležitostmi, což vede ke zvýšeným očekáváním v oblasti matematické gramotnosti.

¹ Galbraith, P., H. Henn and M. Niss (eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, Springer US, <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>.



A decorative horizontal bar consisting of a long grey rectangle on the left, a large white number '3' in the center, and a shorter grey rectangle on the right.

3

Uspořádání matematické domény

3 USPOŘÁDÁNÍ MATEMATICKÉ DOMÉNY

Matematický rámec šetření PISA definuje oblast matematiky a popisuje, jak je matematická gramotnost u patnáctiletých žáků hodnocena. Projekt PISA hodnotí, do jaké míry jsou patnáctiletí žáci schopni matematicky uvažovat a matematiku efektivně využívat v situacích a problémech, z nichž většina vychází z kontextů každodenního života.

Pro účely hodnocení lze definici matematické gramotnosti PISA 2022 analyzovat ze třech navzájem propojených hledisek (viz obrázek 2):

- matematické uvažování (deduktivní i induktivní) a řešení problémů (k čemuž patří matematické postupy popisující, co žáci dělají, když ve snaze úlohu vyřešit propojují kontext daného problému s matematikou);
- matematický obsah, jehož použití je cílem testové úlohy;
- kontext, z něhož testová úloha vychází, spolu s vybranými dovednostmi pro 21. století, které podporují matematickou gramotnost a jsou jejím prostřednictvím rozvíjeny.

Uspořádání této části koncepčního rámce vychází z několika otázek, které souvisejí s definicí matematické gramotnosti. Jedná se o otázky:

- Jaké postupy jedinci používají, když uvažují matematicky a řeší kontextové matematické úlohy?
- Jaké znalosti matematického obsahu můžeme předpokládat u jedinců – konkrétně u patnáctiletých žáků?
- V jakém kontextu lze sledovat a hodnotit matematickou gramotnost a jak tento kontext souvisí se stanovenými dovednostmi pro 21. století?

3.1 Matematické uvažování a postupy řešení problémů

3.1.1 Matematické uvažování

Matematické uvažování (deduktivní i induktivní) je prostředkem k hodnocení situací, k volbě strategií, vyvozování logických závěrů, vyvíjení a popisování řešení a k rozpoznávání způsobu, jakým lze tato řešení aplikovat. Žáci uvažují matematicky, když:

- identifikují, rozpoznávají, uspořádávají, stanovují vzájemné souvislosti a používají symboly;
- konstruují, abstrahují, hodnotí, dedukují, odůvodňují, vysvětlují a obhajují;
- interpretují, vyjadřují úsudky, kritizují, vyvracejí a blíže vymezují.

Pro dnešní svět a pro definici oblastí šetření PISA jsou obzvlášť důležité dva aspekty matematického uvažování. Jedním z nich je odvozování z jednoznačných předpokladů (deduktivní uvažování), které je charakteristickým rysem matematického procesu. Druhým důležitým aspektem je statistické a pravděpodobnostní (induktivní) uvažování.

Matematické uvažování (deduktivní i induktivní), které vychází z některých klíčových znalostí, jež tvoří pilíře školní matematiky, je podstatou matematické gramotnosti. K těmto klíčovým znalostem patří:

- pochopení pojmů kvantita, číselné obory a jejich algebraické vlastnosti;
- uvědomění si síly abstraktního uvažování a používání symbolů;
- rozpoznávání matematických struktur a jejich pravidelností;
- zjišťování funkčních vztahů mezi veličinami;
- používání matematického modelování jako lupy, kterou lze pozorovat reálný svět (např. v rámci fyzikálních, biologických, společenských a behaviorálních věd);
- porozumění variaci jako základnímu kameni statistiky.

Následující popis každé z těchto kategorií podává přehled o dané znalosti a o tom, jakým způsobem podporuje matematické uvažování.

3.1.1.1 Pochopení pojmů kvantita, číselné obory a jejich algebraické vlastnosti

Pochopení pojmů kvantita, číselné obory a jejich algebraické vlastnosti zahrnuje základní pojmy: číslo, vnořené číselné obory (např. přirozená čísla do celých čísel, ta do racionálních a ta do reálných čísel), počítání s čísly a algebraické vlastnosti těchto oborů. Je zejména užitečné porozumět tomu, jak progresivně expanzivní číselné obory umožňují řešit progresivně složitější rovnice. To je základ, který žákům umožní vnímat víc důkazů o existenci matematiky v reálném životě v průběhu jejich pokračující výuky matematiky.

K efektivnímu používání kvantifikace je nezbytné pracovat nejen s pouhými čísly, ale také s číselnými obory. Samotná čísla mají pouze omezenou relevanci; teprve operace, které s nimi můžeme provádět, z nich činí mocný nástroj, proto je řádné pochopení číselných operací základem matematického uvažování.

Zároveň je důležité porozumět otázkám znázornění v matematice (jako symboly s číslicemi, body na číselné ose, geometrické kvantita a zvláštní symboly, např. π) a jak mezi nimi přecházet, jak je pochopit, jak jsou tato znázornění ovlivněna číselnými obory, jaký význam mají algebraické vlastnosti těchto oborů, jak jsou důležité pro operace v těchto oborech a konečně, jaký je význam součtových a násobných identit, asociativnosti, komutativnosti a distributivní vlastnosti násobení vůči sčítání.

3.1.1.2 UVědomění si síly abstraktního uvažování a používání symbolů

Abstraktní uvažování znamená vědomé a selektivní odhalování strukturálních podobností matematických objektů a vytváření vztahů mezi těmito objekty na základě daných podobností. Ve školní matematice abstraktní uvažování vede k vytváření vztahů mezi konkrétními objekty, symbolickými znázorněními a operacemi, včetně práce s algoritmy a myšlenkovými modely. Tato schopnost hraje rovněž svou roli při využívání výpočetních zařízení. Schopnost vytvářet abstraktní pojmy, manipulovat s nimi a poučit se z práce s abstrakcí v technologických kontextech představuje významnou dovednost počítačového myšlení.

Žáci používají znázornění – textové, symbolické, grafické, číselné, geometrické nebo v programovacím kódu – k uspořádání a vyjadřování svého matematického myšlení. Znázornění umožňují předkládat matematické nápady zhuštěnou formou, což zase vede k efektivním algoritmům. Jsou rovněž základním prvkem matematického modelování, který umožňuje žákům abstrahovat zjednodušené nebo idealizované formulace problémů každodenního života. Tyto struktury mají též význam pro interpretaci a nadefinování funkce počítačových zařízení.

Obznanění se s možnostmi abstraktního uvažování a symbolického znázornění napomáhá uvažování v rámci aplikace matematiky v každodenním životě, jak předpokládá tento koncepční rámec, neboť umožňuje žákům přejít od konkrétních detailů dané situace k jejím obecnějším charakteristikám a efektivně tyto rysy popisovat.

3.1.1.3 Rozpoznávání matematických struktur a jejich pravidelností

Při pohledu na zápis $5 + (3 + 8)$ vidí někteří žáci základní školy řadu symbolů naznačujících, že mají být sečteny v určitém pořadí podle pravidel provádění daných operací. Jiní vidí číslo přičtené k součtu dvou jiných čísel. Tato druhá skupina vnímá určitou strukturu.

Vnímání struktury je způsob, jak nalézt a zapamatovat si význam zobecněného zápisu. Tyto struktury jsou rovněž významné pro interpretaci a definování funkce výpočetních zařízení. Schopnost vnímat strukturu je důležitou koncepční pomůckou pro procedurální znalosti.

Důkladné pochopení matematické struktury napomáhá i při modelování. Pokud nejsou zkoumané objekty abstraktní matematické objekty, ale spíše předměty reálného světa, které mají být matematicky modelovány, pak se může matematická struktura stát pro takové modelování vodítkem. Žáci mohou také aplikovat strukturu na jiné než matematické objekty s cílem matematicky je analyzovat. Nepravidelný tvar lze aproximovat jednoduššími tvary, jejichž obsah je známý. Geometrickému vzoru lze porozumět pomocí hypotetických transformací posunutí, otáčení nebo zrcadlení a symetrie a zvětšit ho abstraktně do celého prostoru. Statistická analýza často vyžaduje aplikaci struktury na určitý soubor dat, například za

předpokladu, že vychází z normálního rozdělení, nebo že je jedna proměnná lineární funkcí druhé, ovšem měřeno s chybou normálního rozdělení.

Schopnost vnímat matematické struktury napomáhá uvažování při aplikaci matematiky v každodenním životě, jak předpokládá tento koncepční rámec, neboť umožňuje žákům aplikovat znalosti určitých situací nebo problémů v jednom kontextu na problémy v jiném kontextu, kde mají podobnou strukturu.

3.1.1.4 Zjišťování funkčních vztahů mezi veličinami

Žáci základních škol mohou narazit na problémy, kde musí najít konkrétní veličiny. Například jakou rychlostí musíte jet z Tucsonu do Phoenixu, tedy trasu dlouhou 180 km, abyste ji ujeli za 1 hodinu a 40 minut? Takové úlohy mají konkrétní odpověď: pokud máte ujet 180 km za 1 hodinu a 40 minut, musíte jet rychlostí 108 km za hodinu.

Vztahy mezi veličinami lze vyjádřit rovnicemi, grafy, tabulkami nebo slovním popisem. Důležitým krokem v učení je extrahovat z nich samotný pojem funkce jako abstraktní objekt, který je těmito rovnicemi, grafy atd. znázorněn. Základní prvky tohoto konceptu tvoří definiční obor, z něhož jsou vybírány vstupy, dále obor hodnot, v němž se nacházejí výstupy, a postup získávání výstupů ze vstupů.

Zjišťování funkčních vztahů mezi proměnnými v aplikacích matematiky v každodenním životě, jak předpokládá tento koncepční rámec, podporuje uvažování, neboť umožňuje žákům soustředit se na to, jaký dopad na danou situaci má vzájemná závislost a interakce mezi proměnnými.

3.1.1.5 Používání matematického modelování jako lupy, kterou lze pozorovat reálný svět

Modely představují konceptualizaci jevů. Jsou zjednodušením reality a podkladem pro určité vlastnosti daného jevu, přičemž zároveň aproximují nebo ignorují jiné vlastnosti. Matematické modely jsou formulovány v matematickém jazyce a používají širokou škálu matematických nástrojů a výsledků (např. z aritmetiky, algebry, geometrie apod.). Samy o sobě se používají k přesnému definování pojetí či teorie určitého jevu k analýze a hodnocení dat (vyhovuje daný model datům?) a k vytváření předpovědi.

Počítačové (nebo výpočetní) modely umožňují testovat hypotézy, generovat data, zavádět prvky nahodilosti apod. K matematické gramotnosti patří schopnost chápat výpočetní modely, hodnotit je a čerpat z nich.

Používání modelů obecně, zejména matematických modelů podporuje uvažování při aplikaci matematiky v každodenním životě, jak předpokládá tento koncepční rámec, protože dává žákům podnět k tomu, aby se soustředili na nejvýznamnější prvky dané situace, a tak redukovali problém na jeho samotnou podstatu.

3.1.1.6 Porozumění variaci jako základnímu kameni statistiky

Statistika je v mnoha směrech hledáním vzorců ve vysoce proměnlivém prostředí: snahou nalézt jednu definující „pravdu“ uprostřed oblasti značného náhodného šumu. Uvozovky u slova „pravda“ naznačují, že matematika nemůže odhalit pravdu jako takovou, ale může provést s určitou pravděpodobností její odhad, který je doprovázen odhadem chyby obsažené v tomto procesu. Jedinec pracující s touto informací se tedy ocitá v dilematu v tom smyslu, že nikdy s jistotou neví, jaká je skutečná pravda. Provedený odhad přinejlepším nabízí rozpětí mezi možnými hodnotami – například čím lepší postup a čím větší vzorek dat, tím užší bude rozpětí možných hodnot, i když se takovému rozpětí nelze vyhnout. Některé aspekty tohoto procesu byly sice představeny v předchozích cyklech PISA, ale v důsledku jeho rostoucího významu je na něj v tomto koncepčním rámci kladen větší důraz.

Porozumění variaci jako základní vlastnosti statistiky podporuje uvažování při aplikaci matematiky v každodenním životě, jak předpokládá tento koncepční rámec, protože podněcuje žáky k tomu, aby se zabývali argumentací na základě dat a byli si současně vědomi omezení, jimž vyvozované závěry podléhají.

3.1.1.7 Řešení problémů

Definice matematické gramotnosti hovoří o schopnosti jednotlivce formulovat, používat a interpretovat (a zároveň i hodnotit) matematiku. Tyto tři pojmy, tj. formulovat, používat a interpretovat, poskytují užitečnou a smysluplnou strukturu pro uspořádání matematických postupů, které popisují, co se odehrává,

když jedinec propojuje kontext problému s matematikou a řeší ho. Zadání úloh v matematickém testu šetření PISA 2022 se zaměřují buď na matematické uvažování, nebo na jeden z těchto tří matematických postupů:

- formulování situací matematicky;
- používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování;
- interpretování, aplikování a hodnocení matematických výsledků.

Formulování naznačuje, jak efektivně žáci rozpoznávají možnosti použít matematiku v problémových situacích a jak jsou potom schopni vtisknout situaci potřebnou matematickou strukturu nezbytnou k tomu, aby mohli daný problém zasazený do kontextu formulovat matematicky. *Používání* ukazuje, jak dobře žáci používají výpočty a úpravy, jak efektivně aplikují známé pojmy a fakta při úspěšném řešení matematicky zformulovaného problému. *Interpretování* (a *hodnocení*) se zabývá tím, jak efektivně jsou žáci schopni reflektovat matematická řešení či závěry, interpretovat je v kontextu problému z každodenního života a rozhodnout, zda dávají výsledky nebo závěry smysl a/nebo zda jsou použitelné.

3.1.1.8 Formulování situací matematicky

Slovo *formulovat* v definici matematické gramotnosti odkazuje na schopnost rozpoznat a nalézat příležitosti pro použití matematiky a schopnost dát problému formulovanému v nějakém typu kontextu potřebnou matematickou strukturu. Jedinci v průběhu formulování situací matematicky rozhodují, odkud mohou čerpat základní matematické pojmy a postupy potřebné k analýze, formulování a řešení úlohy, převádějí je z prostředí každodenního života do oblasti matematiky, dodávají problému z každodenního života matematickou strukturu, reprezentaci a specifičnost. Přemýšlejí o omezeních a předpokladech v problému a hledají v nich smysl. Konkrétně proces formulování situací matematicky zahrnuje například následující činnosti:

- výběr vhodného modelu ze seznamu;
- určení matematických aspektů problému umístěného v každodenním životě a stanovení důležitých proměnných;
- rozpoznání matematické struktury (včetně pravidelností, vztahů a modelů) problémů nebo situací;
- zjednodušení situace nebo problému tak, aby je bylo možné podrobit matematické analýze (například rozložením na jednotlivé části);
- určení omezujících podmínek a předpokladů nutných pro matematické modelování a zjednodušení získaná z kontextu;
- zobrazení situace matematicky za použití vhodných proměnných, symbolů, grafů a standardních modelů;
- zobrazení problému jiným způsobem včetně jeho uspořádání podle matematických pojmů a stanovení vhodných předpokladů;
- pochopení a vysvětlení vztahů mezi jazykem vázaným na kontext problému a formálním symbolickým jazykem nutným pro jeho vyjádření matematicky;
- převedení problému do matematického jazyka či reprezentace;
- rozpoznání těch aspektů problému, které odpovídají známým problémům nebo matematickým pojmům, faktům či postupům;
- výběr nejefektivnějšího výpočetního nástroje ze široké nabídky a jeho použití ke znázornění matematického vztahu spjatého s problémem umístěným v kontextu;
- vytvoření uspořádané řady na sebe navazujících pokynů k vyřešení problému.

3.1.1.9 Používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování

Slovo *používat* v definici matematické gramotnosti hovoří o schopnosti aplikovat při řešení matematicky formulovaných úloh matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování ve snaze dospět k matematickým závěrům. Když jedinci používají matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování pro řešení úloh, provádí

matematické postupy potřebné k získání výsledků a nalezení matematického řešení (například provádění aritmetických výpočtů, řešení rovnic, vyvozování logických závěrů z matematických předpokladů, zacházení se symboly, získávání matematických dat z tabulek a grafů, zobrazování a manipulace s útvary v prostoru a analyzování dat). Vytváří model problémové situace, hledají pravidelnosti, určují vztahy mezi matematickými prvky a formulují matematické argumenty. Konkrétně proces používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování zahrnuje činnosti jako:

- provádění jednoduchých výpočtů;
- vyvozování jednoduchých závěrů;
- výběr vhodné strategie ze seznamu;
- navržení a realizace strategií hledání matematických řešení;
- využívání matematických nástrojů včetně technologií, které jsou vhodné pro nalezení přesných či přibližných řešení;
- aplikace matematických faktů, pravidel, algoritmů a struktur při hledání řešení;
- zacházení s čísly, grafickými a statistickými daty a informacemi, s algebraickými výrazy, rovnicemi a geometrickými reprezentacemi;
- tvorba matematických diagramů, grafů, simulací i konstrukcí a získávání matematických dat z těchto reprezentací;
- používání a přecházení mezi různými reprezentacemi při hledání řešení;
- zobecňování a vytváření hypotéz na základě výsledků získaných při použití matematických postupů k hledání řešení;
- zvažování matematických argumentů, vysvětlování a odůvodňování matematických výsledků;
- hodnocení významu sledovaných (nebo navržených) modelů a pravidelností v datech.

3.1.1.10 Interpretování, aplikování a hodnocení matematických výsledků

Slovo *interpretovat* (a *hodnotit*) se v definici matematické gramotnosti vztahuje ke schopnosti uvažovat o matematických řešeních, výsledcích či závěrech a interpretovat je v kontextu výchozího problému z běžného života. To zahrnuje převedení matematických řešení nebo úvah zpět do kontextu zadání a rozhodnutí, zda výsledky odpovídají danému kontextu a dávají v tomto kontextu smysl. *Interpretování, aplikování a hodnocení matematických výsledků* zahrnuje prvky „interpretace“ i prvky „hodnocení“ cyklu matematického modelování. Žáci mohou být v tomto procesu vyzváni vysvětlit a argumentovat v kontextu zadání, musí přemýšlet o procesu modelování i o jeho výsledcích. Konkrétně proces interpretování, aplikování a hodnocení matematických výsledků zahrnuje následující činnosti:

- interpretace údajů prezentovaných v grafické podobě a/nebo v diagramech;
- hodnocení matematického výsledku na základě kontextu;
- zpětná interpretace matematického výsledku v kontextu běžného života;
- zhodnocení přiměřenosti matematického řešení v kontextu původní situace z běžného života;
- porozumění tomu, jaký vliv má reálný svět na výsledky a výpočty v rámci matematického postupu nebo modelu s cílem posoudit v rámci kontextu, jak by se tyto výsledky měly upravit či aplikovat;
- vysvětlení, proč je, nebo není daný matematický výsledek či řešení smysluplné v kontextu původní situace;
- pochopení významu a limitů matematických pojmů a matematických řešení;
- kritické zhodnocení a určení limitů modelu použitého k řešení problému;
- použití matematického a informatického myšlení k vytváření předpovědí, obstarávání podkladů pro argumenty, k testování a porovnávání navrhovaných řešení.

3.2 Znalosti matematického obsahu

Porozumění matematickému obsahu – a schopnost tyto znalosti aplikovat při řešení smysluplných problémů v různých kontextech – je pro občany moderního světa důležité. Musíme umět matematicky uvažovat a řešit problémy, interpretovat situace v osobních, profesních, společenských i vědeckých kontextech a k tomu potřebujeme určité penzum matematických znalostí a porozumění problematice.

Vzhledem k tomu, že cílem projektu PISA je hodnocení matematické gramotnosti, je navrženo určité uspořádání matematického obsahu podle matematických jevů, které jsou na pozadí širokých tříd problémů.

Následující seznam kategorií matematického obsahu, jenž byl použit již v roce 2012, se znovu objevuje v cyklu PISA 2022 s cílem zachytit jak matematické jevy, které jsou na pozadí širokých tříd problémů, tak i obecnou strukturu oblasti matematiky a hlavní témata běžného školního kurikula. Vybrané čtyři okruhy charakterizují z hlediska matematiky klíčový obsah a ilustrují široké oblasti obsahu používaného v testových položkách šetření PISA 2022 (které budou zahrnovat i tzv. úlohy PISA-D² s cílem poskytnout další příležitosti žákům nacházejícím se ve spodní části výkonnostního spektra):

- změna a vztahy,
- prostor a tvar,
- kvantita,
- neurčitost a data.

Prostřednictvím těchto čtyř okruhů lze oblast matematiky uspořádat tak, aby testové úlohy pokrývaly různé části oboru a soustředily se na důležité matematické jevy. Zároveň okruhy zabraňují příliš detailnímu členění matematického obsahu, což by bylo na překážku při tvorbě mnohotvárných a podnětných matematických úloh z každodenního života. I když má rozdělení na okruhy podstatný význam pro tvorbu testových úloh a interpretaci výsledků testování, je důležité poznamenat, že některé úlohy mohou být potenciálně hodnoceny ve více obsahových okruzích.

Níže popsané široce koncipované obsahové okruhy a úžeji vymezené obsahové tematické celky vhodné pro patnáctileté žáky reflektují úroveň a šíři obsahu, který lze zařadit do testování v rámci šetření PISA 2022. Šetření PISA 2022 klade zvláštní důraz na čtyři vybraná témata. Tato témata nejsou sice v rámci stávajících obsahových kategorií ničím novým, ale zasluhují zvláštní pozornost.

Každé z těchto témat je probíráno v rámci diskuse odpovídajících obsahových okruhů takto:

- růstové jevy (změna a vztahy),
- geometrická aproximace (prostor a tvar),
- počítačové simulace (kvantita),
- podmíněné rozhodování (neurčitost a data).

3.2.1 Změna a vztahy

V přirozeném i uměle vytvořeném světě existuje mezi objekty a podmínkami celá řada dočasných i trvalých vztahů, přičemž ke změnám dochází uvnitř systémů spolu souvisejících objektů nebo v podmínkách, při nichž se jednotlivé prvky navzájem ovlivňují. V mnoha případech se tyto změny projevují v průběhu času. Jindy souvisí změna v jednom objektu nebo veličině se změnou v jiném objektu či veličině, v některých případech se jedná o nespojitou změnu, jindy je změna spojitá. Některé vztahy jsou stabilní, neměnné. Vyšší úroveň gramotnosti v oblasti změny a vztahů obnáší schopnost pochopit základní druhy změn a rozpoznat, kdy k nim dochází, abychom při popisování a předpovídání změn uměli používat vhodné matematické modely. Z matematického hlediska to znamená nejen modelovat změnu a vztahy pomocí odpovídajících funkcí a rovnic, ale také vytvářet, interpretovat a převádět data mezi symbolickými a grafickými reprezentacemi těchto vztahů.

² PISA for Development.

Růstové jevy: odhalení nebezpečí chřipkové pandemie a bakteriálních nákaz i hrozby změny klimatu vyžaduje, aby lidé uvažovali nejen o lineárních vztazích, ale chápali, že takové jevy potřebují nelineární (často exponenciální, ale i jiné) modely. Lineární vztahy jsou běžné, snadno rozpoznatelné a pochopitelné, ale předpokládat pouze lineární povahu vztahů může být nebezpečné. Dobrým příkladem linearity, používané zřejmě každým, je odhad vzdálenosti, kterou lze ujet stanovenou rychlostí v různých časových úsecích. Pomocí takové aplikace lze odvodit rozumný odhad, ovšem pouze při relativně stabilní rychlosti. Uplatnění takového lineárního přístupu například při chřipkové epidemii by však po pěti dnech od jejího vypuknutí vedlo k závažnému podhodnocení počtu nakažených osob. A právě zde, když se tempo změny každý den zvyšuje, má zásadní význam základní pochopení nelineárního (i kvadratického a exponenciálního) růstu a potenciální rychlosti šíření infekce. Významným příkladem exponenciálního růstu je šíření infekce virem zika, kdy odhalení exponenciálního růstu pomohlo zdravotnickému personálu tuto skrytou hrozbu objevit a náležitě rychle zareagovat.

3.2.2 Prostor a tvar

Okruh prostor a tvar zahrnuje celou řadu jevů, s nimiž se v našem viditelném fyzickém světě setkáváme každý den. Patří sem vzory, vlastnosti objektů, umístění a orientace, reprezentace objektů, kódování a dekódování vizuálních informací, navigace a dynamická interakce s reálnými útvary i jejich reprezentacemi, pohyb, přesouvání a schopnost předvídat akce v prostoru. Základ kategorie prostor a tvar tvoří geometrie, ale kategorie překračuje hranice tradičních geometrických obsahů, významů i metod a využívá prvky z dalších oblastí matematiky, jako jsou prostorová představivost, měření a algebra. Například tvary se mohou měnit a bod se může pohybovat po množině bodů daných vlastností, což vyžaduje pojmy z oblasti funkcí. Ústřední roli v této kategorii hrají sice vzorce pro měření, avšak do tohoto obsahového okruhu patří také rozpoznávání a manipulace s útvary a jejich interpretace v prostředí, pro něž je nutné využití matematických nástrojů, počínaje softwarem dynamické geometrie, či například systém určení přesné polohy (GPS) až po software pro strojové učení.

Koncepční rámec PISA vychází z předpokladu, že matematická gramotnost v oblasti prostor a tvar vyžaduje pochopení celé řady základních pojmů a zvládnutí klíčových dovedností. Matematická gramotnost v této kategorii zahrnuje takové činnosti, jako jsou porozumění perspektivě (například na obrazech), vytváření map a čtení z nich, transformace tvarů s použitím technologie i bez ní, interpretace pohledů na trojrozměrné scénérie z různých úhlů a zobrazování útvarů.

Geometrické aproximace: dnešní svět je plný tvarů, které neodpovídají obvyklým představám o stejnoměrnosti či symetrii, a jelikož jednoduché vzorce neřeší nepravidelnosti, je obtížnější porozumět tomu, co vlastně vidíme, a hledáme plochu nebo objem výsledných struktur. Například určení potřebné velikosti kobercové podlahové krytiny v budově, kde mají byty ostré úhly a výrazná zakřivení, vyžaduje jiný přístup než ten, který by byl použit u obvyklé obdélníkové místnosti.

3.2.3 Kvantita

Pojem kvantita je nejrozšířenější a nejzákladnější aspekt matematiky, který se týká života a fungování v našem světě. Patří sem kvantifikace vlastností objektů, vztahů, situací a entit ve světě, porozumění různým reprezentacím těchto kvantifikací a posuzování interpretací a argumentů založených na množství. Pokud se snažíme kvantifikovat svět, musíme rozumět měření, počtům, velikostem, jednotkám, ukazatelům, relativní velikosti, číselným trendům a schémátům. Aspekty kvantitativního uvažování, jako jsou význam čísla, různé formy reprezentace čísel, „elegance“ ve výpočtech, počítání z paměti, odhad a posouzení smysluplnosti výsledku, tvoří v této kategorii základ matematické gramotnosti.

Kvantifikace je primární metodou pro popis a měření velkých souborů vlastností jednotlivých aspektů světa. Umožňuje nám modelovat situace, zkoumat změny a vztahy, popisovat prostor i tvary a manipulovat s nimi, uspořádat a interpretovat data i měřit a vyhodnocovat neurčitost. Z toho plyne, že matematická gramotnost v této kategorii vyžaduje znalosti čísel a operací s nimi v celé řadě různých použití.

Počítačové simulace: V matematice i ve statistice se vyskytují problémy, jež nelze tak snadno řešit kvůli složitosti požadovaných matematických postupů, nebo z toho důvodu, že obsahují velký počet faktorů, které všechny působí ve stejném systému, nebo kvůli etickým ohledům souvisejícím s vlivem na živé bytosti nebo

na jejich prostředí. V dnešním světě se tyto problémy stále častěji řeší pomocí počítačových simulací řízených algoritmy.

Zjištění, že počítačové simulace jsou těžištěm obsahového okruhu kvantita, naznačuje, že v kontextu počítačového testování matematiky (Computer-Based Assessment of Mathematics – CBAM), které se používá v koncepčním rámci PISA od roku 2022, je zařazena obsáhlá kategorie složitých problémů, včetně tvorby rozpočtů i plánování, a žáci je mohou analyzovat dle proměnných daného problému s použitím počítačových simulací dostupných v rámci testové úlohy.

3.2.4 Neurčitost a data

Variace a související neurčitost neodmyslitelně patří k vědě, technologiím i každodennímu životu, proto také tvoří jádro teorie pravděpodobnosti a statistiky. Obsahový okruh neurčitost a data zahrnuje uvědomění si role variace v reálném světě, včetně smyslu pro kvantifikaci této variace, přiznání její neurčitosti a chyby v souvisejících dedukcích. Zahrnuje také vyvozování, interpretování a hodnocení závěrů, které vycházejí ze situací založených na neurčitosti. Klíčovými pojmy v této kategorii jsou znázornění a interpretace dat.³

V ekonomických predikcích, volebních výsledcích a předpovědích počasí se vždy skrývá jistá míra neurčitosti a nejednoznačnosti. S variací se můžeme setkat ve výrobních procesech, výsledcích testů či šetření. Náhoda hraje zásadní roli v mnoha individuálních volnočasových aktivitách. Pravděpodobnost a statistika, tradiční tematické celky obsažené ve školním kurikulu, poskytují formální prostředky pro popis, modelování a interpretaci určité třídy jevů, v nichž hraje klíčovou úlohu variace, a pro formulaci odpovídajících stochastických závěrů. Řešení problémů v tomto obsahovém okruhu navíc usnadňuje znalost čísel a některých aspektů algebry, např. grafů a použití symbolů.

Podmíněné rozhodování: statistika poskytuje měřítko pro vlastnosti variací mnoha jevů, s nimiž se lidé setkávají v každodenním životě. Tímto měřítkem je variance. Všude tam, kde se vyskytuje více než jedna proměnná, obsahuje každá proměnná určitou variaci a dále kovariaci, která charakterizuje vztah mezi proměnnými. Tyto vzájemné vztahy lze často znázornit kontingenční tabulkou, což je základ pro podmíněné rozhodování (závěry). V kontingenční tabulce lze pro dvě dichotomické proměnné (tedy pro dvě proměnné, z nichž každá poskytuje dvě možnosti) nalézt čtyři kombinace. Kontingenční tabulka (analýza dané situace) nabízí tři typy procentních veličin, z nichž každá stanoví odhad odpovídajících pravděpodobností. K těmto pravděpodobnostem patří pravděpodobnost čtyř navzájem propojených událostí, dvě marginální pravděpodobnosti a podmíněné pravděpodobnosti, které hrají ústřední roli v postupu nazvaném podmíněné rozhodování. Úlohy testu PISA mají určit, zda jsou žáci schopni vyčíst příslušná data z tabulky a důkladně porozumět smyslu údajů, které z ní extrahují.

3.2.4.1 Obsahová témata pro testování matematické gramotnosti patnáctiletých žáků

Abychom náležitě porozuměli úlohám vycházejícím z různých kontextů a týkajících se okruhů: změna a vztahy, prostor a tvar, kvantita, neurčitost a data a mohli je řešit, musíme ovládat celou řadu matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů, to vše v dostatečné hloubce a na dostatečně vysoké úrovni. Projekt PISA, jehož cílem je měřit matematickou gramotnost, se snaží hodnotit úroveň a části matematiky, které by měli patnáctiletí žáci ovládat, pokud se mají stát tvořivými, angažovanými a přemýšlivými občany 21. století schopnými docházet k řádně odůvodněným soudům a rozhodnutím. Protože projekt PISA není určen ani navržen pro hodnocení matematického kurikula, snaží se reflektovat matematiku, kterou se žáci mohli pravděpodobně naučit před patnáctým rokem života.

Při zpracovávání koncepčního rámce matematické gramotnosti PISA 2012 s cílem vyvinout hodnocení, které by směřovalo jednak do budoucnosti, ale zároveň odráželo učivo, s nímž se patnáctiletí žáci již měli možnost setkat, autoři analyzovali vzorky požadovaných výsledků výuky v jedenácti zemích a na základě této analýzy se pokusili stanovit, jakou matematiku se žáci na celém světě učí a jakou matematiku považují v jednotlivých zemích za realistickou a důležitou pro přípravu žáků na prahu vstupu na trh práce, nebo k přijetí na školu vyššího stupně. Na základě společných rysů těchto analýz a na základě doporučení

³ Moore, D. (1997), „New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics”, *International Statistical Review*, Vol. 65/2, pp. 123–165, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1751-5823.1997.tb00390.x>.

odborníků byl pro měření matematické gramotnosti patnáctiletých žáků v rámci projektu PISA 2012 stanoven jako vhodný níže popsáný obsah, který je platný také pro cyklus PISA 2022.

V koncepčním rámci PISA 2022 byl seznam témat rozšířen o čtyři další témata. Výsledný výčet je jen ilustrací tematických celků obsažených v šetření PISA 2022, nejde tedy o vyčerpávající seznam:

- *Růstové jevy*: různé typy lineárního a nelineárního růstu.
- *Geometrická aproximace*: aproximace atributů a vlastností nepravidelných nebo neznámých tvarů a objektů jejich rozložením na známější tvary a objekty, pro něž existují vzorce a nástroje.
- *Počítačové simulace*: zkoumání situací (například zpracování rozpočtu, plánování, populační distribuce, šíření choroby, experimentální pravděpodobnosti, modelování doby odezvy apod.) podle proměnných a jejich vliv na výsledek.
- *Podmíněné rozhodování*: používání základních principů kombinatoriky a pochopení vzájemných vztahů proměnných za účelem interpretování situací a stanovení předpovědí.
- *Funkce*: pojem funkce, který klade (i když nikoli výlučně) důraz na lineární funkce, jejich vlastnosti a možnosti jejich popisu a reprezentace. Obvykle se funkce prezentují verbálně, symbolicky, pomocí tabulek nebo graficky.
- *Algebraické výrazy*: slovní interpretace algebraických výrazů a jejich úpravy včetně numerických, symbolických a aritmetických operací, umocňování a odmocňování.
- *Rovnice a nerovnice*: lineární a příbuzné rovnice a nerovnice, jednoduché kvadratické rovnice, analytické a neanalytické metody řešení.
- *Soustavy souřadnic*: znázornění a popis dat, pozice a vztahů.
- *Vztahy uvnitř geometrických útvarů a těles a vztahy mezi nimi*: statické závislosti jako algebraické vztahy mezi prvky útvarů (např. Pythagorova věta jako vyjádření vztahů mezi délkami stran v pravoúhlém trojúhelníku), vzájemná poloha, podobnost a shodnost i dynamické vztahy včetně transformací a posunutí či shodnost dvourozměrných a trojrozměrných objektů.
- *Měření*: kvantifikace vlastností útvarů a těles i mezi nimi, například velikost úhlu, vzdálenost, délka, obvod, povrch, obsah a objem.
- *Čísla a jednotky*: pojem a znázornění čísel, číselných oborů (včetně převodů mezi nimi) a dále vlastnosti celých a racionálních čísel, podstatné vlastnosti iracionálních čísel, veličiny a jednotky popisující čas, peníze, hmotnost, teplotu, vzdálenost, obsah a objem, odvozené veličiny a jejich číselný popis.
- *Aritmetické operace*: charakter a vlastnosti těchto operací a související konvence zápisu.
- *Procenta, poměr a úměrnost*: číselný popis relativní velikosti a využívání úměry při řešení úloh.
- *Principy kombinatorického počítání*: jednoduché kombinace.
- *Odhad*: účelové zaokrouhlování veličin a číselných výrazů včetně zaokrouhlování s požadovanou přesností.
- *Sběr dat, jejich zobrazení a interpretace*: povaha, původ a sběr různých druhů dat a různé způsoby jejich analýzy, znázornění a interpretace.
- *Variabilita dat a její popis*: pojmy jako variabilita, rozložení, centrální tendence datových souborů, způsoby, jak je popsat a interpretovat z kvantitativního a grafického hlediska.
- *Vzorky a jejich výběr*: pojmy výběr vzorku a vzorkování populace včetně formulace jednoduchých závěrů na základě vlastností vzorků, mj. správnosti a přesnosti.
- *Náhoda a pravděpodobnost*: pojem náhodných jevů, náhodných variací a jejich znázornění, nahodilost a frekvence událostí, základní aspekty pojmu pravděpodobnost a podmíněná pravděpodobnost.

3.3 Kontexty testových úloh a vybrané dovednosti pro 21. století

Definice matematické gramotnosti zavádí dvě důležité úvahy týkající se testových úloh PISA. Za prvé: definice jednoznačně stanoví, že matematická gramotnost se projevuje *v kontextech každodenního života*. Za druhé: matematická gramotnost *nám pomáhá uvědomit si úlohu matematiky ve světě a díky tomu odpovědně usuzovat a rozhodovat se jako tvořivý, angažovaný a přemýšlivý občan 21. století*. V tomto oddílu se zabýváme vlivem kontextů každodenního života i dovedností pro 21. století na stanovení testových úloh.

3.3.1 Kontexty

Důležitým aspektem matematické gramotnosti je používání matematiky k řešení problémů v určitém kontextu, což je aspekt našeho světa, v němž se dané problémy vyskytují. Volba vhodných matematických strategií a reprezentací je často závislá právě na tomto kontextu, v němž daný problém vzniká. Z toho pak vyplývá potřeba používat při sestavování příslušného modelu znalosti reálného světa.

S ohledem na počet zemí, účastnících se projektu PISA 2022, a zároveň i s ohledem na rostoucí počet účastnických zemí, které lze zařadit mezi nízko či středně příjmové, a na možnost, že část patnáctiletých nenavštěvuje školu, musí autoři pečlivě dbát na to, aby byly kontexty použité v testových položkách přístupné široké škále účastníků. Zde je rovněž důležité zajistit nižší čtenářskou náročnost zadání úloh tak, aby úlohy nadále hodnotily jen matematickou gramotnost.

Pro účely matematického koncepčního rámce PISA 2022 byly ponechány čtyři okruhy kontextů použité v šetření PISA 2012, z nichž vycházíme při klasifikaci jednotlivých testových úloh. Je třeba dodat, že tyto kontexty slouží k vývoji testových úloh, ale nebudou přímo zohledněny při prezentaci výsledků.

Osobní – Úlohy, které spadají do okruhu osobních kontextů, se zaměřují na aktivity samotného jedince, jeho rodiny nebo vrstevníků. Může sem patřit mimo jiné vaření, nakupování, hry, zdraví, osobní doprava, rekreace, sporty, cestování, plánování a osobní finance.

Profesní – Úlohy, které se řadí do okruhu profesního kontextu, vycházejí ze světa práce. Otázky mohou zahrnovat mimo jiné měření, kalkulaci nákladů a objednávání materiálu na stavbu, mzdy/účetnictví, kontrolu kvality, plánování/inventarizaci, design/architekturu, rozhodování v souvislosti se zaměstnáním, a to s pomocí nebo bez pomoci vhodné technologie. Profesní kontext se může týkat jakéhokoli typu práce, od nekvalifikované až po nejvyšší úroveň odborné činnosti. Podstatné však je, aby úlohy projektu PISA byly přiměřené patnáctiletým žákům.

Společenský – Úlohy, které spadají do okruhu společenských kontextů, se zaměřují na komunitu a společnost dané osoby (ať už místní, národní či globální). Mohou se týkat mimo jiné volebních systémů, veřejné dopravy, vlády, veřejné politiky, demografie, reklamy, zdraví, zábavy, národních statistik a hospodářství. I když jsou ve všech těchto situacích aktéry jedinci, v tomto okruhu kontextů se na úlohy díváme z perspektivy komunity či společnosti.

Vědecký – Úlohy zařazené do okruhu vědeckých kontextů souvisejí s aplikací matematiky v přírodě, ve světě vědy a technologií. Otázky mohou spadat mimo jiné do oblasti počasí a klimatu, ekologie, medicíny, výzkumu vesmíru, genetiky, měření a světa matematiky jako takové. Do tohoto kontextu patří testové úlohy, které jsou čistě matematické, a všechny její prvky spadají do světa matematiky.

Testové otázky PISA jsou seskupeny do úloh, které obsahují úvodní text (stimul) společný pro všechny otázky dané úlohy, neboť obvykle všechny otázky v jedné úloze spadají do stejného okruhu kontextu. Existují však výjimky, například jeden úvodní text může být v různých otázkách zkoumán z osobního i společenského hlediska. Pokud jsou v určité otázce čistě matematické konstrukty, které neodkazují na jakýkoli jiný kontext, řadíme tuto úlohu do kategorie vědecké.

3.3.2 Dovednosti pro 21. století

Následujících osm dovedností pro 21. století zařazených do koncepčního rámce PISA 2022 bylo vybráno na základě snahy o hledání průsečíku mezi obecnými dovednostmi pro 21. století a souvisejícími oborovými dovednostmi, které jsou přirozenou součástí výuky daného předmětu. Jedná se o dovednosti:

- kritické myšlení,
- kreativita,
- výzkum a bádání,
- sebe usměrňování, iniciativa a vytrvalost,
- používání informací,
- systémové myšlení,
- komunikace,
- reflexe.



Hodnocení matematické gramotnosti

4 HODNOCENÍ MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI

4.1 Uspořádání matematické části šetření PISA 2022

V souladu s definicí matematické gramotnosti vycházejí testové úlohy, které byly vyvinuty jako součást šetření PISA, z určitého kontextu. Úlohy vyžadují aplikaci důležitých matematických pojmů, znalostí, dovedností a porozumění (znalost matematického obsahu) na úrovni, kterou lze očekávat u patnáctiletých žáků (viz výše). Koncepční rámec slouží jako návod k uspořádání hodnocení či jako průvodce jeho obsahem. Je důležité, aby test obsahoval vhodný poměr úloh, který reflektuje různé složky koncepčního rámce matematické gramotnosti.

4.2 Rozložení bodového skóre v oblasti matematického uvažování a procesu řešení problémů

Testové úlohy v oblasti matematického šetření PISA 2022 mohou být zařazeny buď do kategorie matematického uvažování, nebo do jedné ze tří kategorií matematických postupů souvisejících s řešením problému. Cílem k zajištění vyváženého poměru mezi testovými položkami je sestavit test, jenž přikládá přibližně stejnou váhu dvěma relevantním postupům, které zahrnují propojování reálného světa se světem matematiky (formulování a interpretace/hodnocení), matematické uvažování a používání matematiky, kdy žáci prokazují schopnost řešit matematicky formulovaný problém. Je sice pravda, že matematické uvažování lze sledovat i v procesu formulování, interpretace a používání matematiky, ale takové úlohy přispívají pouze ke klasifikaci v jedné oblasti.

TABULKA 1 | Přibližné rozložení bodového skóre podle kategorie postupu v PISA 2022

		Podíl bodů v procentech v šetření PISA 2022
Matematické uvažování		přibližně 25 %
Řešení matematických problémů	Formulování situací matematicky	přibližně 25 %
	Používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování	přibližně 25 %
	Interpretování, aplikování a hodnocení matematických výsledků	přibližně 25 %
Celkem		100 %

Je důležité dodat, že úlohy v každé kategorii postupu by měly mít určité rozpětí obtížnosti a matematických požadavků. Tím se dále zabývá tabulka požadavků na matematické uvažování a na každý z postupů řešení problémů.

4.3 Rozložení bodového skóre podle obsahových kategorií

Testové úlohy z matematiky jsou navrženy tak, aby zachycovaly znalost matematického obsahu uvedeného v tomto koncepčním rámci dříve. Trendové úlohy vybrané do šetření PISA 2022 jsou rozloženy napříč čtyřmi obsahovými kategoriemi uvedenými v tabulce 2. Při sestavování testu je snahou rozvrhnout tyto úlohy do jednotlivých obsahových kategorií tak, aby bylo zajištěno co možná nejvyváženější rozložení bodového skóre, protože každá z těchto kategorií má pro tvořivé, angažované a přemýšlivé občany svůj význam.

TABULKA 2 | Přibližné rozložení bodového skóre podle obsahových kategorií v PISA 2022

Obsahová kategorie	Podíl bodů v procentech v šetření PISA 2022
Změna a vztahy	přibližně 25 %
Prostor a tvar	přibližně 25 %
Kvantita	přibližně 25 %
Neurčitost a data	přibližně 25 %
Celkem	100 %

Je důležité dodat, že úlohy v každé obsahové kategorii by měly mít určité rozpětí obtížnosti a matematických požadavků.

4.4 Rozpětí obtížnosti úloh

Oblast matematické gramotnosti v šetření PISA 2022 obsahuje úlohy velmi různé obtížnosti tak, aby pokryly rozsah schopností patnáctiletých žáků. Jsou zahrnuty úlohy, které jsou náročné i pro nejschopnější žáky, ale také úlohy přiměřené výrazně slabším žákům, u nichž se zjišťuje úroveň matematické gramotnosti. Z psychometrického hlediska je šetření, koncipované pro účely měření konkrétní kohorty respondentů, nejúčinnější a nejpřínosnější, odpovídá-li obtížnost testových úloh schopnostem zúčastněných respondentů. Navíc dovednostní škály, které tvoří základ prezentace výsledků PISA, mohou poskytnout užitečné informace o všech žácích pouze tehdy, pokud úlohy, z nichž jsou odvozeny, postihují celou škálu dovedností uvedenou výše.

4.5 Počítačové testování matematiky

Hlavním způsobem měření v šetření PISA 2022 je počítačové testování matematiky (CBAM). Přejít k počítačovému testování probíhá již od cyklu PISA 2015 a pokračoval v cyklu PISA 2018. Za účelem zachování trendů mezi jednotlivými cykly byla obě šetření z roku 2015 i 2018 počítačově neutrální, přestože probíhala v módu počítačového testování. Úplný přechod na CBAM v roce 2022 poskytuje řadu příležitostí k rozvoji forem hodnocení matematické gramotnosti, které bude v souladu s vyvíjející se povahou matematiky v moderním světě a při tom zajistí spojitost s předcházejícími cykly. K těmto možnostem patří nové formáty úloh (například přetahování myši), možnost předkládat žákům data z každodenního života (například rozsáhlejší soubory dat, které lze třídit), vytváření matematických modelů nebo simulací, které žáci mohou zkoumat pomocí změn hodnot proměnných, modelování křivek a využití těch nejlepších pro tvorbu předpovědí. CBAM kromě širší nabídky jednotlivých typů otázek a matematických možností rovněž umožňuje adaptivní testování.

Možnost adaptivního testování pomocí CBAM, které bylo již dříve využito při hodnocení čtenářské gramotnosti, umožňuje lépe popsat schopnosti žáků na obou koncích výkonnostního spektra. Díky nabídce většího počtu individualizovaných kombinací testových úloh pro žáky na základě jejich odpovědí a bodů dosažených v předchozích úlohách získáme mnohem podrobnější informace o výkonových charakteristikách žáků na obou koncích vytvořené výkonnostní škály.

Lepší možnosti, které nabízejí počítačové technologie, přispívají k tomu, že jsou testové úlohy pro žáky zajímavější, vizuálně přitažlivější a snáze pochopitelné. Žáci mohou například dostat pohyblivé zadání, znázornění trojrozměrných objektů, jimiž lze otáčet, nebo díky úloze získat pružnější přístup k relevantním informacím. Nové formáty úloh, například ty, které vyžadují zodpovězení otázky přetažením údajů myši, nebo výběrem určité části obrázku, mají za cíl zaujmout žáky, umožnit širší škálu typů odpovědi a poskytnout ucelenější obrázek o matematické gramotnosti. Zásadní výzvou je zajistit, aby tyto úlohy nadále testovaly *matematickou gramotnost*, a minimalizovat aspekty, které s testovanou doménou nesouvisí.

4.6 Design matematických úloh šetření PISA 2022

Při testování matematické gramotnosti v rámci šetření PISA 2022 se používají tři formáty testových otázek: s volnou tvorbou odpovědi, s uzavřenou tvorbou odpovědi a s výběrem z více odpovědí.

- Otevřené otázky s tvorbou odpovědi vyžadují poněkud delší písemnou odpověď a některé z nich mohou také požadovat, aby žák uvedl kroky vedoucí k řešení, nebo vysvětlil, jak došel k určité odpovědi. Při vyhodnocování těchto otázek je nezbytné zapojení vyškolených odborníků, kteří odpovědi manuálně kódují. Z důvodu využívání adaptivního testování CBAM bude třeba minimalizovat počet otázek, k jejichž vyhodnocování je třeba vyškolených kodérů.
- Uzavřené otázky s tvorbou odpovědi nabízejí pro zaznamenání řešení strukturovanější rámec a u odpovědi lze snadno určit, zda je správná, nebo nesprávná. Žákovské odpovědi na tento typ otázek mohou být často kódovány automaticky. Nejčastější formou uzavřené otázky s tvorbou odpovědi je dotaz na konkrétní číslo.
- U otázek s výběrem odpovědi žák vybírá z několika možností jednu nebo více správných odpovědí, které lze vyhodnocovat automaticky.

Testové nástroje jsou navrhovány tak, aby v nich byly všechny tři formáty otázek zastoupeny přibližně rovnoměrně.

Test z matematiky se skládá z testových úloh, které obsahují úvodní slovní stimul a další informace uvedené v tabulkách, grafech a diagramech, plus jednu nebo více otázek vycházejících z tohoto společného zadání. Takový formát, kdy žáci řeší sérii souvisejících otázek, jim dává příležitost hlouběji se ponořit do kontextu nebo problému.

Obtížnost otázek vybíraných pro testy v projektu PISA je velmi různorodá, což má zajistit, aby otázky pokrývaly širokou škálu schopností testovaných žáků. Navíc jsou všechny hlavní testované kategorie (obsah, matematické uvažování, postupy řešení úloh, kontexty a dovednosti pro 21. století) pokud možno zastoupeny otázkami s širokým rozsahem obtížnosti. Obtížnost otázek je jedním z mnoha parametrů důkladně ověřovaných v rámci pilotního šetření před tím, než je otázka zařazena do hlavního šetření PISA. Do šetření PISA jsou otázky zařazeny rovněž na základě toho, jak odpovídají jednotlivým kategoriím koncepčního rámce, a na základě jejich psychometrických vlastností.

Při tvorbě a výběru otázek se navíc pečlivě zvažuje jejich obtížnost z hlediska čtenářské gramotnosti. Cílem je formulovat zadání co nejjednodušeji a nejsrozumitelněji. Pozornost je také věnována možným kulturním předsudkům a překážkám, z tohoto důvodu jsou všechny vybrané úlohy konzultovány s národními centry. Poté jsou úlohy velmi pečlivě překládány do národních jazyků, a to s extenzivním zpětným překladem a dalšími aspekty kontroly kvality.

PISA 2022 také zahrnuje nástroj, který žákům umožňuje v souladu s požadavky testu v oblasti matematické gramotnosti zapsat odpověď včetně postupu. Tento nástroj dovoluje zapisovat čísla i symboly. Žáci mohou kliknutím na příslušné tlačítko vkládat zlomky, mocniny apod. K dispozici jsou i dodatečné symboly jako π nebo větší/menší než, stejně jako operátory, např. značky pro násobení a dělení.

Sada nástrojů, které jsou žákům k dispozici, také obsahuje základní vědeckou kalkulačku s funkcemi sčítání, odčítání, násobení a dělení, odmocňování, pí, závorek, mocniny, zlomků (y/x) a převrácené hodnoty ($1/x$). Kalkulačka je naprogramovaná tak, aby respektovala standardní pořadí operací.

4.7 Vyhodnocování položek

Přestože je většina položek vyhodnocována dichotomicky (tj. žáci získají buď plný počet bodů, nebo žádný), v případě některých otevřených otázek s tvorbou odpovědi mohou žáci získat kredit za částečnou odpověď podle míry její „správnosti“. Předpokládá se, že takové částečně správné hodnocení bude zvláště důležité zejména u položek souvisejících s matematickým uvažováním, jejichž výsledkem je jen zřídka samotné číslo a jejichž odpovědi obsahují jeden nebo více prvků.

4.8 Gramotnostní úrovně v matematice

Výsledky šetření PISA v matematice jsou prezentovány různými způsoby. Na základě výsledků žáků v zúčastněných zemích je odvozena celková úroveň v matematické gramotnosti a je definováno několik tzv. gramotnostních úrovní. Zároveň je popsána míra matematické gramotnosti charakteristická pro žáky na jednotlivých úrovních. V šetření PISA 2022 je zavedeno šest gramotnostních úrovní, které byly používány v předcházejících cyklech šetření, následovně: úroveň 1 bude přejmenována na úroveň 1a, tabulka s popisem jednotlivých úrovní bude rozšířena o úroveň 1b a 1c. Tyto dodatečné úrovně byly přidány proto, aby bylo možné detailněji postihnout výsledky žáků, jejichž výkon se nachází na spodním konci spektra způsobilosti.

Vedle celkové matematické škály jsou po provedení pilotního šetření vyvinuty dílčí škály, které jsou následně součástí publikace výsledků. Tyto dílčí škály jsou definovány pro oblast matematického uvažování a pro tři postupy matematického řešení problémů: *formulování situací matematicky; používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování; interpretace, aplikace a hodnocení matematických výsledků*.

4.9 Matematická gramotnost a kontextuální dotazníky

Žákovské a školní kontextuální dotazníky slouží již od prvního cyklu šetření PISA dvěma navzájem souvisejícím účelům, které se využívají k širšímu cíli hodnocení vzdělávacích systémů: za prvé tyto dotazníky poskytují kontext, jehož prostřednictvím se interpretují výsledky šetření PISA v rámci vzdělávacích systémů i mezi nimi. Za druhé mají dotazníky za cíl poskytnout spolehlivé a validní měření dalších vzdělávacích indikátorů, které mohou samy o sobě přispět užitečnými informacemi vzdělávací politice a výzkumu.

Pro šetření PISA 2022 byly v návaznosti na šetření PISA 2012 určeny dvě hlavní oblasti postojů žáků k matematice. Jsou jimi zájem žáků o matematiku a ochota žáků se v matematice angažovat.

Zájem žáků o matematiku se vztahuje k přítomné i budoucí činnosti. Je nutné zkoumat zájem žáků o matematiku ve škole, zda ji vnímají jako užitečnou pro každodenní život a zda plánují matematiku dál studovat a věnovat se jí ve své profesní dráze. Toto téma je aktuální napříč zeměmi, neboť v celé řadě z nich poslední dobou klesá podíl žáků, kteří si matematiku a jí příbuzné disciplíny volí jako obor dalšího studia, přičemž ale vzrůstá potřeba absolventů škol právě s tímto zaměřením.

Ochota žáků věnovat se matematice souvisí s postoji, pocity i sebehodnocením a ty dohromady předurčují, zda žák bude, nebo nebude umět těžit z úrovně matematické gramotnosti, jíž dosáhl. Žáci, které matematické činnosti baví a kteří se při nich cítí sebevědomě, budou s vyšší mírou pravděpodobnosti používat matematiku při úvahách o situacích v nejrůznějších okamžicích každodenního života jak ve škole, tak mimo ni. Konstrukty šetření PISA, související s touto problematikou, zahrnují pocity štěstí, sebevědomí, (chybějící) obavy z matematiky, dále sebezpoznání a seberealizaci.

Výsledky šetření PISA 2022 o výkonu a postojích žáků jsou důležitým zdrojem dat pro tvůrce vzdělávacích politik v zúčastněných zemích. Kombinací informací o úrovni matematické gramotnosti zjištěné v šetření PISA a údajů o postojích, názorech a pocitech, které předurčují žáky k využívání matematické gramotnosti, pak vzniká ucelenější obraz.



A large, hollow outline of the uppercase letter 'P' is positioned on the right side of the page. It is centered vertically relative to the horizontal bars. The letter is white with a thin black outline. Two thick, solid gray horizontal bars are present: one on the left side of the page and one on the right side, both extending across the width of the page. The letter 'P' is placed between these two bars, with its vertical stem overlapping the right bar.

Příloha A

PŘÍLOHA A | Příklady ukázkových úloh pro hodnocení matematické gramotnosti v PISA 2022

Úlohy zařazené v této příloze ilustrují některé nejdůležitější prvky koncepčního rámce. Protože český překlad těchto úloh není k dispozici, uvádíme jejich původní znění.⁴

SMARTPHONE USE

Tento příklad ilustruje:

- možnosti CBAM, zejména používání tabulkových procesorů s tříděním a dalšími možnostmi.

SMARTPHONE USE

The spreadsheet shows the population (in millions) and the number of smartphone users (in millions) for a range of countries in Asia. The data has been sorted by country name.

Country	Population (in millions)	Number of smartphone users (in millions)	
Bangladesh	166.735	8.921	
Indonesia	266.357	67.57	
Japan	125.738	65.282	
Malaysia	31.571	20.98	
Pakistan	200.663	23.228	
Philippines	105.341	28.627	
Thailand	68.416	30.486	
Turkey	81.086	44.771	
Vietnam	96.357	29.043	

⁴ Více ukázkových úloh lze nalézt na <http://www.oecd.org/pisa/test> a v nezkrácené verzi koncepčního rámce na <https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf>.

PISA 2021

Smartphone use
Question 1/3

Refer to "Smartphone use" on the right. Click on a choice to answer the question.

Which operation on columns B and C will determine the correct values in Column D?

For each country:

Divide the Column B value by the Column C value:
 B / C

Divide the sum of the Column B and Column C values by the Column C value:
 $(B + C) / C$

Divide the Column C value by the Column B value:
 C / B

Divide the Column B value by the sum of the Column B and Column C values:
 $B / (B + C)$

SMARTPHONE USE

The spreadsheet shows the population (in millions) and the number of smartphone users (in millions) for a range of countries in Asia. The data has been sorted by country name.

Column A	Column B	Column C	Column D
Country	Population (in millions)	Number of smartphone users (in millions)	Proportion of smartphone users
Bangladesh	166.735	8.921	
Indonesia	266.357	67.57	
Japan	125.738	65.282	
Malaysia	31.571	20.98	
Pakistan	200.663	23.228	
Philippines	105.341	28.627	
Thailand	68.416	30.486	
Turkey	81.086	44.771	
Vietnam	96.357	29.043	

PISA 2021

Smartphone use
Question 2/3

You can sort the data in the spreadsheet by selecting the sort button in the column header. The data will be sorted in ascending order.

Use the sort buttons help you evaluate each statement.

Click on either True or False for each of the following statements.

Statement	True	False
The country with the largest population also has the largest number of smartphone users.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
The country with the fewest number of smartphone users also has the smallest population.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
The country with the highest proportion of smartphone users also has the smallest population.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
The country with the median proportion of smartphone users is also the country with the median number of smartphone users.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

SMARTPHONE USE

The data for the proportion of smartphone users (expressed as a percentage) has been added to the spreadsheet in Column D.

Column A	Column B	Column C	Column D
Country	Population (in millions)	Number of smartphone users (in millions)	Proportion of smartphone users
Bangladesh	166.735	8.921	5%
Indonesia	266.357	67.57	25%
Japan	125.738	65.282	52%
Malaysia	31.571	20.98	38%
Pakistan	200.663	23.228	12%
Philippines	105.341	28.627	27%
Thailand	68.416	30.486	45%
Turkey	81.086	44.771	55%
Vietnam	96.357	29.043	30%

PISA 2021

Smartphone use

Question 3/3

You can change the horizontal axis variable between the **Population (in millions)** and the **Minimum hourly wage (in Zeds)** for each country by selecting the corresponding tab.

By selecting the corresponding tabs study the different graphs and answer the question.

For which variable (population or minimum hourly wage) does the proportion of smartphone users in a country increase as the variable value increases?

Population

Minimum hourly wage (Zeds)

Explain your reasoning:

SMARTPHONE USE

The graph plots the proportion of smartphone users per country in terms of either the **Population (in millions)** and the **Minimum hourly wage (in Zeds)** for each country.

Population Hourly wage

Country	Population (millions)	Proportion of smartphone users
Turkey	10	55%
Thailand	70	45%
Malaysia	40	38%
Vietnam	100	30%
Philippines	100	25%
Indonesia	270	20%
Pakistan	200	10%
Bangladesh	180	5%

PISA 2021

Smartphone use

Question 3/3

You can change the horizontal axis variable between the **Population (in millions)** and the **Minimum hourly wage (in Zeds)** for each country by selecting the corresponding tab.

By selecting the corresponding tabs study the different graphs and answer the question.

For which variable (population or minimum hourly wage) does the proportion of smartphone users in a country increase as the variable value increases?

Population

Minimum hourly wage (Zeds)

Explain your reasoning:

SMARTPHONE USE

The graph plots the proportion of smartphone users per country in terms of either the **Population (in millions)** and the **Minimum hourly wage (in Zeds)** for each country.

Population Hourly wage

Country	Min hourly wage (Zeds)	Proportion of smartphone users
Turkey	6.5	55%
Japan	7.0	50%
Thailand	3.0	45%
Malaysia	2.5	38%
Philippines	1.5	30%
Vietnam	2.0	30%
Indonesia	2.0	25%
Pakistan	2.0	10%
Bangladesh	0.5	5%

THE BEAUTY OF POWER

Tento příklad obsahuje:

- určitou škálu úloh souvisejících s matematickým uvažováním v rámci matematického kontextu, a to od jednodušších po složitější;
- odkazy na růstové jevy, přestože je kontext této úlohy ve skutečnosti více zaměřen na matematické uvažování a na rozpoznávání schémat než na samotný růst.

PISA 2021

The beauty of powers
Introduction

Read the introduction. Then click on the NEXT arrow.

THE BEAUTY OF POWERS

When you perform repeated multiplication with the same number, you can use power notation to summarise what you are doing.

For example:

$$8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 \quad (\text{four 8s multiplied together})$$

and

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6 \quad (\text{six 7s multiplied together})$$

PISA 2021

The beauty of powers
Question 1/3

Refer to "The beauty of powers" on the right. Click on either True or False for each of the statements.

Statement	True	False
The number 8^{16} is 8 times larger than the number 8^{15}	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
The number 8^{10} is 10 times larger than the number 8	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

THE BEAUTY OF POWERS






When you perform repeated multiplication with the same number, you can use power notation to summarise what you are doing.

For example:

$$8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 \quad (\text{four 8s multiplied together})$$

and

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6 \quad (\text{six 7s multiplied together})$$

PISA 2021     

The beauty of powers
Question 2/3

Refer to "The beauty of powers" on the right. Click on a choice to answer the question.

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$






What is the value of the expression above?

-1
 1
 0
 5

THE BEAUTY OF POWERS

When you perform repeated multiplication with the same number, you can use power notation to summarise what you are doing.

For example: $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$ (four 8s multiplied together)
and $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6$ (six 7s multiplied together)

PISA 2021     

The beauty of powers
Question 3/3

Refer to "The beauty of powers" on the right. Click on a choice to answer the question.

What is the last digit of the number 7^{190} ?

1
 3
 7
 9

THE BEAUTY OF POWERS

The first nine powers of the number 7 are listed below.

Notice how fast they grow!

The last digits of these numbers follow a rule or pattern. Study the pattern to answer the question.

$7^1 =$	7
$7^2 =$	49
$7^3 =$	343
$7^4 =$	2 401
$7^5 =$	16 807
$7^6 =$	117 649
$7^7 =$	823 543
$7^8 =$	5 764 801
$7^9 =$	40 353 607

ALWAYS SOMETIMES NEVER

Tento příklad obsahuje:

- v oblasti uvažování řadu úkolů od jednoduchých ke složitějším, včetně série různých typů otázek: od otázek s odpovědí ano/ne, otázek s výběrem odpovědi až po otázky s tvorbou odpovědi.

PISA 2021

Always sometimes never
Introduction
Read the introduction. Then click on the NEXT arrow.

ALWAYS SOMETIMES NEVER

Statements that people make can generally be grouped into three different categories:

Statements that are **ALWAYS** true;
Statements that are **SOMETIMES** true; and
Statements that are **NEVER** true.

The statement:
"A number that is divisible by 4 is also divisible by 2"
is **ALWAYS** true because 2 is a factor of 4.

The statement:
"A number that is divisible by 9 is also divisible by 6"
is **SOMETIMES** true. For example, 36 is divisible by 9 and by 6, but 27 is divisible by 9, but not divisible by 6.

The statement:
"The sum of two odd numbers is odd"
is **NEVER** true because the sum of two odd numbers is always even.

PISA 2021

Always sometimes never
Question 1/3
For each statement, indicate if it is **always true**, **sometimes true** or **never true**

Statement	Always True	Sometimes True	Never True
A 14-year old girl was at least once in her life half her current height.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
A 14-year old girl is taller than a 10-year old girl.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

ALWAYS SOMETIMES NEVER







Statements that people make can generally be grouped into three different categories:

Statements that are **ALWAYS** true;
Statements that are **SOMETIMES** true; and
Statements that are **NEVER** true.

The statement:
"A number that is divisible by 4 is also divisible by 2"
is **ALWAYS** true because 2 is a factor of 4.



The statement:
"A number that is divisible by 9 is also divisible by 6"
is **SOMETIMES** true. For example, 36 is divisible by 9 and by 6, but 27 is divisible by 9, but not divisible by 6.







The statement:
"The sum of two odd numbers is odd"
is **NEVER** true because the sum of two odd numbers is always even.

PISA 2021      

Always sometimes never
Question 2/3

For each statement, indicate if it is **always true**, **sometimes true** or **never true**

Statement	Always True	Sometimes True	Never True
When a whole number is multiplied by itself the answer is even.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Doubling a whole number produces an even number.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Halving an odd whole number produces a whole number	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
$3x + 1 = \frac{6x + 2}{2}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
  The perimeter of figure A is greater than the perimeter of figure B.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
If a coin is flipped 50 times it will land heads up 25 times.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

PISA 2021      

Always sometimes never
Question 3/3


Each of the following statement is **SOMETIMES TRUE**.

For each statement provide an example of when the statement is true and when the statement is not true.

Statement	Example of when the statement is true	Example of when the statement is not true
The person with the largest number of coins has the largest amount of money.	<i>Enter your example here</i>	<i>Enter your example here</i>
$A - B = B - A$	<i>Enter your example here</i>	<i>Enter your example here</i>
If you add the same number to the numerator (top) and the denominator (bottom) of a fraction, the fraction value increases.	<i>Enter your example here</i>	<i>Enter your example here</i>

TVŮRČÍ MYŠLENÍ



A decorative horizontal bar consisting of a long grey rectangle on the left and a smaller grey rectangle on the right, with a large, outlined number '1' centered between them.

1

Úvod

1 ÚVOD⁵

Vývoj mezinárodního hodnocení tvůrčího myšlení může podpořit pozitivní změny ve vzdělávacím procesu a pedagogice. Hodnocení tvůrčího myšlení v PISA 2022 poskytne tvůrcům vzdělávacích politik validní, spolehlivé a využitelné výzkumné nástroje, které jim umožní činit informovaná rozhodnutí. Výsledky rovněž podpoří širší společenskou diskusi o důležitosti a možnostech podpory této klíčové kompetence ve vzdělávacím procesu.

⁵ Úplné znění koncepčního rámce hodnocení tvůrčího myšlení v PISA 2022 je k dispozici na <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA-2021-Creative-Thinking-Framework.pdf>.

A decorative horizontal bar consisting of a long grey rectangle on the left, a large white number '2' with a thin black outline in the center, and a shorter grey rectangle on the right.

2

Definice testované domény

2 DEFINICE TESTOVANÉ DOMÉNY

PISA používá definici tvůrčího myšlení, která je relevantní pro patnáctileté žáky na celém světě. V projektu PISA 2022 je tvůrčí myšlení definováno jako *schopnost aktivně vytvářet, posuzovat a vylepšovat návrhy, které mohou vést k originálním a efektivním řešením, k vytvoření nových poznatků a k působivým projevům představivosti.*

Tato definice tvůrčího myšlení je v souladu s definicí navrženou Strategickou skupinou odborných poradců v oblasti tvůrčího myšlení (Creative Thinking Strategic Advisory Expert Group). Zdůrazňuje skutečnost, že se žáci ve všech oblastech a na všech úrovních školství potřebují naučit, jak produktivně vytvářet návrhy⁶, jak o návrzích přemýšlet z hlediska posuzování jejich relevance a inovativnosti a jak je opakovaně hodnotit, dokud nebude dosaženo uspokojivého výsledku. Tato definice byla rovněž formulována dle pokynů interdisciplinárních odborníků a na základě komplexního studia odborných publikací o tvůrčím myšlení.

Dosahování tvůrčích výsledků však vyžaduje nejen schopnost tvůrčího myšlení, ale také širší a více specializovaný soubor atributů a dovedností, mimo jiné inteligenci, znalost oblasti nebo umělecký talent. Například kreativita označovaná jako „velké K“ (Big C), která souvisí s průlomovými objevy v oblasti technologie nebo s tvorbou mistrovských uměleckých děl, vyžaduje nejen značný talent, hluboké odborné znalosti a vysoké nasazení v konkrétní oblasti, ale i uznání hodnoty příslušného produktu ze strany společnosti. A naopak, kreativity označované jako „malé k“ (little c) neboli kreativity v každodenním životě (jako je tvůrčí uspořádání rodinných fotografií v albu, využití kuchyňských zbytků k přípravě chutného jídla nebo nalezení tvůrčího řešení složitého problému s rozvržením pracovního času)⁷ mohou dosáhnout téměř všichni lidé schopni myslet tvůrčím způsobem.

⁶ Obecný termín „návrh“ (orig. „idea“) bývá v rámci jednotlivých úloh zpřesněn použitím významově zacíleného termínu, aby odpovídal konkrétnímu úkolu v zadání. Jedná se především o termíny: nápad, název, návrh řešení, pokračování příběhu, zakončení příběhu.

⁷ Kaufman, J. and R. Beghetto (2009), „Beyond Big and Little: The Four C Model of Creativity”, Review of General Psychology, <http://dx.doi.org/10.1037/a0013688>.



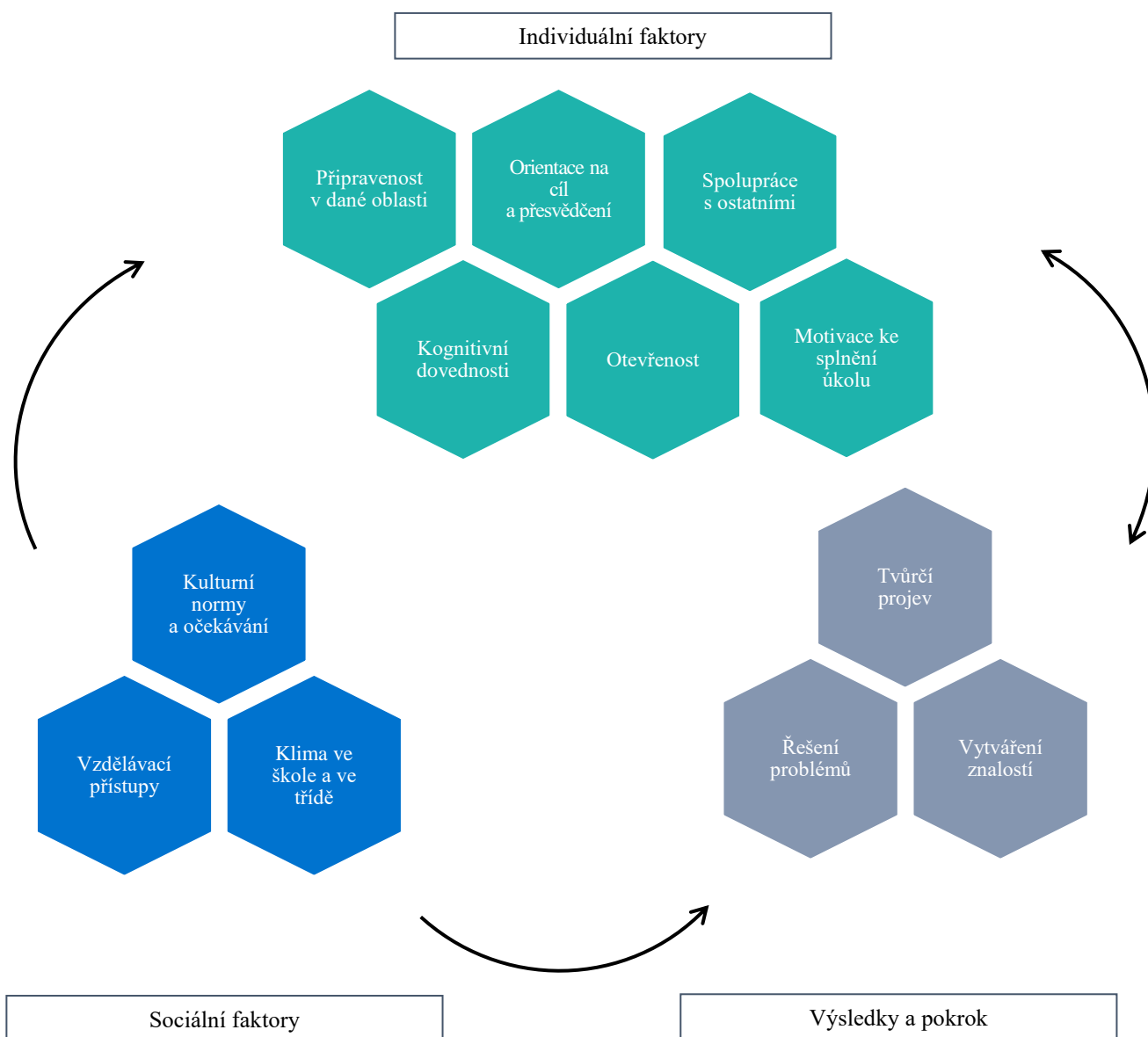
3

Porozumění tvůrčímu
myšlení a jeho hodnocení
ve třídě

3 POROZUMĚNÍ TVŮRČÍMU MYŠLENÍ A JEHO HODNOCENÍ VE TŘÍDĚ

Obrázek 1 uvádí některé klíčové body pro pozorování tvůrčího myšlení ve třídě i pro vztahy mezi jeho jednotlivými prvky. Tyto body vycházejí z pětirozměrného modelu tvůrčího myšlení navrženého Strategickou skupinou odborných poradců v oblasti tvůrčího myšlení.

OBRÁZEK 1 | Faktory a projevy tvůrčího myšlení ve třídě



Školy mohou ovlivnit několik rovin interních zdrojů žáků (které jsou dále označovány jako „individuální faktory“) nezbytných pro jejich tvůrčí myšlení, mimo jiné kognitivní dovednosti, připravenost pro danou oblast (její konkrétní znalosti a zkušenosti s ní), otevřenost novým nápadům a zkušenostem, ochota spolupracovat s ostatními a rozvíjet jejich myšlenky (spolupráce), odhodlání dosahovat vlastních cílů navzdory obtížím a důvěra ve vlastní tvůrčí schopnost (orientace na cíl a přesvědčení) a motivaci k plnění úkolů.

Pokud jde o charakteristiky společenského prostředí žáků, které může podněcovat, nebo naopak brzdit tvůrčí myšlení (dále označovaných jako „sociální faktory“), patří sem nejen kultura ve třídě, ale i vzdělávací přístup škol a širších vzdělávacích systémů stejně jako celkové kulturní prostředí. Všechny tyto složky mohou mít vliv na to, jakou hodnotu přikládají žáci svým tvůrčím schopnostem a kolik do nich investují. Mohou také klást překážky nebo dávat podněty pro zapojení do tvůrčího myšlení.

Školy jsou také prostorem, v němž lze sledovat a měřit projevy tvůrčího myšlení žáků ať již jako jednotlivců, nebo jako součástí skupiny. Tvůrčí úspěchy a pokrok dosažený ve třídě se mohou týkat jednotlivých forem tvůrčího vyjádření (např. komunikování vlastního vnitřního světa a fantazie pomocí písemného projevu, kreslení, hudby nebo jiných uměleckých forem), vytváření znalostí (např. získávání nových poznatků pro skupinu a porozumění v rámci společného zkoumání) nebo tvůrčímu řešení problémů (např. nalézání tvůrčích řešení nejrůznějších problémů napříč jednotlivými oblastmi).





Koncepce hodnocení tvůrčího myšlení v PISA 2022

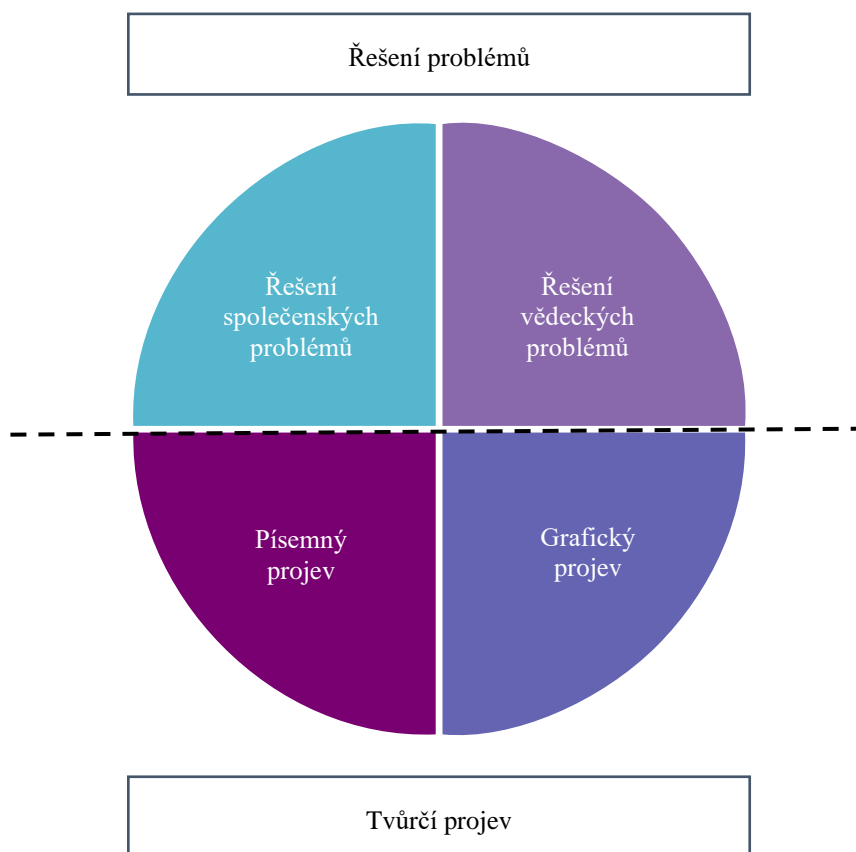
4 KONCEPCE HODNOCENÍ TVŮRČÍHO MYŠLENÍ V PISA 2022

PISA 2022 se zaměřuje na procesy tvůrčího myšlení, které lze od patnáctiletých žáků důvodně očekávat. Jejím cílem není vyzdvihnout výjimečně tvůrčí jedince, nýbrž popsat rozsah, v němž jsou žáci schopni myslet tvůrčím způsobem při vyhledávání a vyjadřování nápadů, a dále zjistit, jak tato schopnost souvisí s přístupy při výuce, se školními aktivitami a s dalšími charakteristikami vzdělávacích systémů.

4.1 Oblasti hodnocení tvůrčího myšlení v PISA 2022

Aktivity v oblasti tvůrčího myšlení, jimiž se patnáctiletí žáci obvykle zabývají, přiměřeně pokrývají čtyři zadané testované oblasti, neboť zachycují povahu reálného světa i každodenní tvůrčí myšlení. I když se tyto oblasti evidentně nezabývají všemi možnými projevy tvůrčího myšlení ve škole vyčerpávajícím způsobem, přesto poskytují dostatečně různorodý popis konstruktů tvůrčího myšlení a zároveň náležitě respektují jednotlivá logistická a technologická omezení, která ovlivňují hodnocení v rámci šetření PISA 2022.

OBRÁZEK 2 | Oblasti hodnocení tvůrčího myšlení



4.1.1 Písemný projev

Písemná tvorba je přirozeným prostředkem tvůrčího vyjádření v rámci školy i mimo ni. Tvůrčí psaní je důležité pro rozvoj kognitivních a komunikačních dovedností dětí.⁸ Kvalitní tvůrčí psaní vyžaduje logickou konzistenci. Jeho autoři požadují po čtenářích, aby porozuměli a uvěřili jejich představivosti. To od čtenářů

⁸ Tompkins, G. (1982), „Seven Reasons Why Children Should Write Stories”, *Language Arts*, Vol. 59/7, pp. 718–721, <https://www.jstor.org/stable/41405103>.

vyžaduje soustředění na detail a návaznost. Například i fantastické příběhy plné monster a mimozemšťanů se musí řídit určitým souborem logických pravidel a musí dávat smysl ve světě, který autor vytvořil.

V kognitivním testu budou žáci muset prokázat schopnost písemně vyjádřit svou představivost při respektování pravidel a konvencí, které zajišťují, aby bylo písemné sdělení srozumitelné a aby je různí čtenáři mohli ocenit pro jeho originalitu. Pro oblast písemného projevu je navrženo několik vzorových testových okruhů. Od žáků se vyžaduje: otevřené a imaginativní psaní (s omezeními délky písemného textu, který budou lidští hodnotitelé muset posuzovat), vytváření návrhů pro různorodé písemné formáty s ohledem na odlišná zadání, například komiksů bez titulků nebo fantazijní ilustrace, a originálně vylepšená cizí písemná práce (jak je uvedeno v zadání jednotlivých úkolů).

4.1.2 Grafický projev

V oblasti grafického projevu žáci zkoumají, experimentují a vyjadřují své myšlenky a vlastní zkušenosti pomocí různých prostředků, nástrojů a postupů. Tvůrčí grafický projev (vizuální vyjádření) se v posledních letech patrně stal významnějším. Všudy přítomnost softwaru pro „desktop publishing“, digitální zobrazování a design povede k tomu, že téměř každý bude muset v určitém okamžiku použít grafickou formu sdělení, které se dotkne buď jeho samotného, nebo širší veřejnosti (vezměme v úvahu například význam kvalitní grafické úpravy životopisu).

Jednotlivé testové úlohy vytvořené pro oblast grafického projevu vyžadují, aby žáci vypracovali grafické návrhy s použitím digitálního kreslicího nástroje, vytvořili grafické návrhy dle scénáře a zadání uvedeného v daném okruhu (např. se zařazením konkrétních detailů, s použitím určitých kreslicích nástrojů) a aby navrhli nebo sami připravili původní vylepšení různých forem grafického projevu (dle zadání úkolu), a to podle stanovených pokynů nebo doplňujících informací.

4.1.3 Řešení společenských problémů

Ve svém každodenním životě používají žáci tvůrčí myšlení k řešení (mezi)osobních (interpersonálních) a společenských problémů. V tomto kontextu vyžaduje tvůrčí myšlení pohled na problém nejen z technického, ale i ze společenského hlediska, jinými slovy, snahu porozumět potřebě jiných lidí, nalézt řešení a řešit klíčové problémy ať už na osobní, školní, širší komunitní nebo globální úrovni. Tvůrčí myšlení v této doméně závisí na schopnosti žáků pocítovat empatii vůči potřebám konkrétní skupiny, hodnotit je, vytvářet návrhy s emočním významem a navrhovat inovativní a zároveň i funkční řešení.⁹

Jednotlivé testové úlohy vytvořené pro oblast řešení společenských problémů vyžadují od žáků, aby se zabývali řešením problémů se společenským zaměřením, a to individuálně nebo v simulovaných scénářích založených na spolupráci, předkládali na základě zadaného scénáře návrhy na řešení společenských problémů a navrhli originální vylepšená řešení problémů (dle zadání úkolu).

4.1.4 Řešení vědeckých problémů

Přestože tvůrčí myšlení v přírodních vědách úzce souvisí s dovednostmi vědeckého zkoumání, některé charakteristiky tohoto testu jej zásadním způsobem odlišují od jiných hodnocení v oblasti matematiky a přírodních věd.

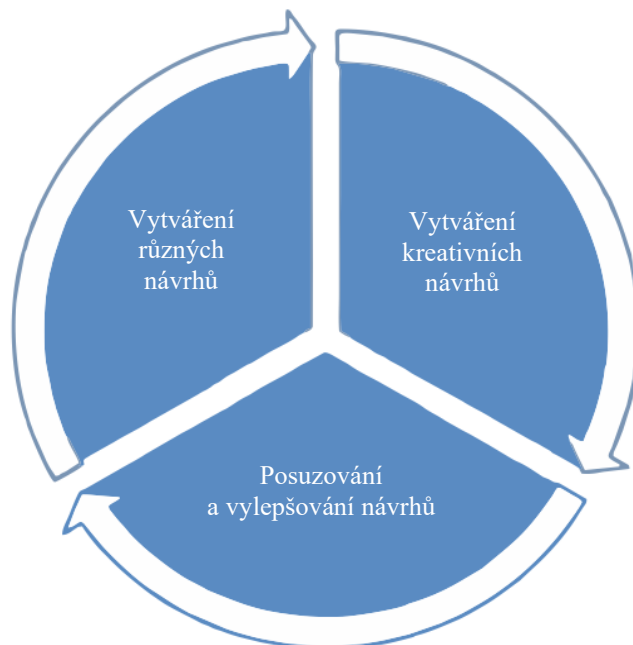
- Toto hodnocení se zaměřuje na vytváření nových nápadů spíše než na aplikaci naučených znalostí.
- Oceňuje se originalita přístupů a řešení žáků (za předpokladu, že odpovědi jsou platné). Třetí rozdíl spočívá v používání otevřených problémů, které mají více než jedno možné řešení a u nichž neexistuje jednoznačné optimální řešení.
- Hodnocení se soustřeďuje na procesy tvůrčího myšlení žáků ve vědeckém kontextu – tedy na způsoby, jimiž žáci přistupují k řešení otevřených problémů a k hledání originálních nápadů, nikoli na jejich schopnost nalézt „správné“ nebo „nejoptimálnější“ řešení.

⁹ Brown, T. and J. Wyatt (2010), „Design Thinking for Social Innovation“, *Stanford Social Innovation Review*, https://ssir.org/articles/entry/design_thinking_for_social_innovation

4.2 Aspekty hodnocení tvůrčího myšlení v PISA 2022

Test vyžaduje zapojení žáků v různých kognitivních procesech, které využívají odlišné soubory dovedností, z nichž každý představuje jiný rozměr tvůrčího myšlení. Tyto soubory dovedností budou označovány jako aspekty.

OBRÁZEK 3 | Aspekty hodnocení tvůrčího myšlení



4.2.1 Vytváření různých návrhů

Obecným ukazatelem schopnosti kreativního myšlení je počet nápadů, které je člověk schopen vygenerovat. To se často nazývá zběhlost a pohotovost při vytváření návrhů, tzv. ideatorní fluence (ideational fluency). Tento indikátor je při hodnocení potenciálu tvůrčí práce jednotlivců dlouhou dobu nejužívanější. To, co skutečně prokazuje tvůrčí myšlení a schopnost vyvarovat se funkční strnulosti a prostému vytváření (generování) mnoha návrhů, které si mohou být všechny velmi podobné, je různorodost těchto návrhů či ideatorní flexibilita (ideational flexibility).¹⁰

Aspekt tvůrčího myšlení, který se týká vytváření různých návrhů, je zaměřen na schopnost žáků flexibilně uvažovat v různých oblastech: například navrhovat různá řešení daného problému, zpracovat různé náměty k příběhům nebo vytvářet různé způsoby grafické prezentace nějakého návrhu. V zadáních souvisejících s tímto aspektem dostanou žáci otevřený scénář s pokynem zpracovat dvě nebo tři navzájem odlišné odpovědi. Je zapotřebí poznamenat, že míra odlišnosti nápadů žáků je podmíněna tím, zda jsou odpovědi vhodné s ohledem na konkrétní úkol.

4.2.2 Vytváření kreativních návrhů

Aspekt testu PISA, který se týká vytváření kreativních návrhů, je zaměřen na schopnosti žáků hledat vhodné a originální návrhy v různých oblastech (např. původní námět příběhu, nápaditý způsob sdělení návrhu grafickou formou, originální řešení společenského nebo vědeckého problému). Jinými slovy, tento aspekt vyžaduje, aby žáci přišli s takovými návrhy na řešení příslušného úkolu, které by napadly jen málokoho. Kritérium vhodnosti znamená, že odpověď musí splňovat základní požadavky úkolu, respektovat případná omezení a nabízet alespoň minimální úroveň užitečnosti odpovědi. To má zajistit, aby žáci skutečně mysleli

¹⁰ Amabile, T. (1983), „The social psychology of creativity: A componential conceptualization”, *Journal of Personality and Social Psychology*, Vol. 45/2, s. 357–376, <http://dx.doi.org/10.1037/0022-3514.45.2.357>.

tvůrčím způsobem (tj. vytvářeli nápady, které jsou originální a užitečné), než aby spíše vytvářeli náhodné asociace (tedy že by produkovali sice originální návrhy, které by ale nebyly pro zadaný úkol využitelné). V zadáních souvisejících s tímto aspektem žáci dostanou otevřený scénář a pokyn podrobněji zpracovat jeden návrh.

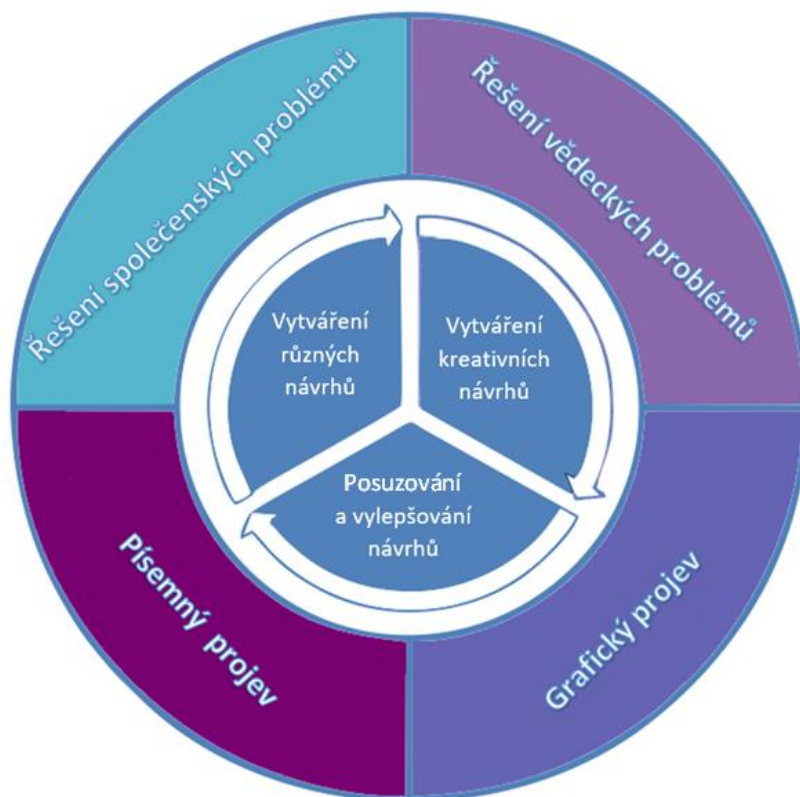
4.2.3 Posuzování a vylepšování návrhů

Aspekt testu PISA, který se týká posuzování a vylepšování nápadů, je zaměřen na schopnosti žáků posoudit omezení předkládaných návrhů a vyhledat originální způsoby jejich vylepšení. Za účelem minimalizace problémů se závislostí napříč jednotlivými úkoly dané úlohy nejsou žáci žádáni, aby zdokonalovali své vlastní nápady, ale aby změnili nebo dále rozpracovali práci někoho jiného. V úkolech týkajících se tohoto aspektu dostanou žáci otevřený scénář s pokynem připravit originální vylepšení daného návrhu a podobně jako u úkolů v jiných aspektech závisí i zde míra schopnosti posuzovat a vylepšovat návrhy na tom, zda odpověď žáka vyhovuje zadanému úkolu. V těchto úkolech musí být vhodnou odpovědí originální vylepšení původního návrhu. Tím se rozumí změna, která uchová podstatu návrhu předloženého na základě zadání a zároveň do něj zařadí i originální prvky, čímž dodá onu kvalitu novosti a využitelnosti, jež charakterizuje kreativní návrhy.

4.3 Kompetenční model tvůrčího myšlení

Obrázek 4 znázorňuje kompetenční model pro test tvůrčího myšlení použitý v šetření PISA 2022. Kompetenční model rozčleňuje tvořivé myšlení do tří aspektů: „vytváření různých návrhů“, „vytváření kreativních návrhů“, „posuzování a vylepšování návrhů“ a do čtyř oblastí: „písemný projev“, „grafický projev“, „řešení společenských problémů“ a „řešení vědeckých problémů“.

OBRÁZEK 4 | Kompetenční model testu tvůrčího myšlení PISA 2022



Test zjišťuje tvůrčí myšlení tím, že po žácích požaduje, aby se produktivně zapojili do kognitivních procesů vytváření návrhů (vytváření různých, resp. kreativních nápadů) a do posuzování a vylepšování návrhů. Nezkoumá tedy pouze odlišné kognitivní procesy tvůrčího myšlení (schopnost vytvářet různorodé či kreativní návrhy), ale také od žáků vyžaduje, aby posuzovali návrhy jiných, rozvíjeli je a navrhovali originální zlepšení těchto návrhů.

Výraz „návrhy (nápady)“ („ideas“) může nabývat v kontextu hodnocení PISA mnoha podob: může se například jednat o příběh, kresbu, řešení společenského problému nebo o otázku týkající se výzkumu vědeckého jevu. Testové okruhy poskytují smysluplný rámec a dostatečně otevřená zadání, v nichž mohou žáci prokázat schopnost vytváření různorodých návrhů a netradičního myšlení. Jednotlivé testové okruhy (bloky) budou sestaveny tak, aby test jako celek i na úrovni celé populace náležitě pokrýval všechna hlediska (aspekty a oblasti) tvůrčího myšlení, avšak ne každý okruh zařazený do tohoto testu nabízí možnost zkoumat všechna hlediska kompetenčního modelu.

Dovednosti požadované kognitivními procesy vytváření návrhů, jejich posuzování a vylepšování jsou zčásti definovány samotným kontextem. I když lze například složení básně i posuzování reálných vědeckých hypotéz zkoumaných v laboratoři považovat za akty vytváření kreativních návrhů, skutečné kognitivní a pro danou oblast relevantní dovednosti, které jedinec potřebuje k úspěšnému tvůrčímu myšlení při těchto dvou činnostech, se poněkud liší a mohou se opírat o odlišný soubor znalostí a zkušeností v dané oblasti. Vytváření návrhů v písemném projevu obvykle vyžaduje, aby autor zjistil, jakou „sondu“ do své paměti má použít ve vztahu k tématu písemného projevu, a aby použil tuto sondu k propátrání dlouhodobé paměti.¹¹ Ve vědeckém kontextu vychází vytváření návrhů hlavně z procesu zkoumání, k němuž patří formulování nových otázek a provádění experimentů za účelem shromáždění důkazů k těmto otázkám.¹²

Stejně tak posuzování a výběr návrhů může vyžadovat svébytné kognitivní dovednosti, oborové znalosti a zkušenosti z mnoha různých tvůrčích oblastí. Například tvůrčí písemný projev vyžaduje přezkoumávání ve snaze zajistit jednoznačnost a konzistentnost a vyhovět potřebám čtenářů¹³; vědecké hodnocení zase nutně potřebuje ověření, zda je řešení efektivní a proveditelné.

Vyvážené pokrytí všech čtyř oblastí umožní zkoumat, do jaké míry mohou žáci, kteří jsou zbláhli v jedné oblasti, prokázat zdatnost i v dalších oblastech.

¹¹ Bereiter, C. and M. Scardamalia (1987), *The psychology of written composition*, L. Erlbaum Associates.

¹² Getzels, J. and M. Csikszentmihalyi (1967), „Scientific creativity”, *Science Journal*, Vol. 3/9, pp. 80–84, <http://psycnet.apa.org/record/1967-16699-001>.

¹³ Bereiter, C. and M. Scardamalia (1987), *The psychology of written composition*, L. Erlbaum Associates.

TABULKA 1 | Možné způsoby měření sledovaných aspektů tvůrčího myšlení v jednotlivých oblastech

	Expresivní (vyjadřovací) oblasti		Vytváření poznatků a řešení problémů	
	Písemný projev	Grafický projev	Společenské	Vědecké
Vytváření různých návrhů	Žák napíše na základě zadání různé titulky, názvy nebo náměty příběhů (např. kreslený vtip, komiks, obrázek nebo ilustraci), které naznačují odlišnou interpretaci zadání.	Žák různým způsobem zkombinuje zadané tvary nebo razítka, aby vytvořil svébytné grafické produkty (např. logo či vlastní návrhy) nebo různým způsobem graficky znázorní údaje (např. pomocí infografiky).	Žák nalézá několik různých řešení společenských problémů (např. nedostatku vody), kde dosažení žádoucího výsledku závisí na různých aktérech, nástrojích nebo metodách.	Žák vytvoří (rozvíjí) několik různých matematických metod řešení otevřeného problému (např. kdo je nejstabilnějším hráčem v týmu) nebo několik různých hypotéz či experimentálních návrhů ke zkoumání nějakého pozorování (např. zvířat, která začnou být náhle agresivní).
Vytváření kreativních návrhů	Žák vytvoří pro určité umělecké dílo originální název, který nějakým způsobem souvisí s uměním.	Žák vytvoří pro školní výstavu originální plakát, který dobře vystihuje téma výstavy.	Žák dokáže vymyslet originální strategii pro efektivní uvedení produktu na trh (kdy výraz efektivní jednoduše vyžaduje, aby daná strategie, pokud bude řádně uplatněna, mohla vést ke zvýšení povědomí o výrobku u cílového publika).	Žák vypracuje efektivní a originální řešení technického problému (příčemž efektivní řešení jednoduše znamená, že by při správné realizaci mohlo představovat možné řešení problému).
Posuzování a vylepšování návrhů	Žák originálním způsobem vylepší titul nějakého uměleckého díla na základě nových informací (např. umělecké inspirace vyplývající z ilustrace), kdy sice ponechá základní prvky daného titulu, ale začlení do něho originálním způsobem prvky související s uměleckou inspirací).	Žák provede originální vylepšení plakátu k výstavě. Ponechá vyobrazení, která jsou jeho součástí, ale nápaditým způsobem navrhne jednoznačnější propojení s výstavou.	Žák nápaditým způsobem vylepší navržené řešení (např. snížení objemu domácího odpadu). Jeho řešení bude vycházet z daného návrhu a bude efektivní (tj. pokud by bylo řádně uplatněno, mohlo by se stát potenciálním řešením problému) a originální.	Žák předloží originální vylepšení navrženého experimentu (např. testování vlastností materiálů), přičemž jeho odpověď musí nabídnout platný a originální návrh experimentu a vycházet z něj.



A decorative horizontal bar consisting of a long grey rectangle on the left, a large white number '5' with a thin black outline in the center, and a shorter grey rectangle on the right.

5

Rozvržení úloh a formát
(druhy) odpovědí
v kognitivním testu

5 ROZVRŽENÍ ÚLOH A FORMÁT (DRUHY) ODPOVĚDÍ V KOGNITIVNÍM TESTU

TABULKA 2 | Požadované rozvržení jednotlivých úloh podle aspektů kompetenčního modelu

Aspekt	Podíl testovacího času
Vytváření různých návrhů	40 %
Vytváření kreativních návrhů	30 %
Posuzování a vylepšování návrhů	30 %

Toto hodnocení usiluje o zajištění rovnováhy v rozložení úloh tvůrčího myšlení do dvou tematických obsahových celků a do čtyř oblastí. Tabulka 3 znázorňuje žádoucí rozvržení úkolů při testování tvůrčího myšlení v koncepčním rámci PISA 2022 dle jednotlivých domén.

TABULKA 3 | Požadované rozvržení jednotlivých úloh podle tematické obsahové oblasti a domén

Tematický obsahový celek	Oblast	Procentní podíl z celkového počtu úloh
Tvůrčí projev	Písemný projev	25 %
	Grafický projev	25 %
Vytváření poznatků a řešení problémů	Řešení společenských problémů	25 %
	Řešení vědeckých problémů	25 %

5.1 Druhy odpovědí

Úlohy, které slouží k hodnocení jednotlivých složek tvůrčího myšlení uvedených v tomto rámci, obsahují následující druhy odpovědí:

- Úkoly se strukturovanou (volně tvořenou) odpovědí: ty obvykle vyžadují písemnou odpověď v rozsahu od několika málo slov (např. název kresleného vtípu nebo formulace vědecké hypotézy) až po krátký text (např. kreativní závěr příběhu nebo vysvětlení návrhu na projekt). Některé úkoly se strukturovanými odpověďmi vyžadují grafickou odpověď (např. návrh plakátu nebo kombinování souboru zadaných tvarů) s využitím jednoduchého kreslicího nástroje.
- Interaktivní úkoly založené na simulaci: tyto úkoly simulují laboratorní prostředí, v němž se žáci mohou zabývat vědeckým výzkumem, nebo prostředím her, v nichž mají žáci za úkol dosáhnout určité úrovně. V rámci těchto úkolů dostávají žáci v reakci na své kroky okamžitou zpětnou vazbu.
- Jednoduché a složité úlohy s výběrem odpovědi: tyto úkoly vyžadují odpovědi na základě výběru jedné z mnoha možností (např. výběr předloženého návrhu oproti vytvoření nového návrhu) a odpovědi pomocí přetahování myši (tzn. kategorizaci návrhů).

A large, hollow outline of the uppercase letter 'P' is positioned on the right side of the page. It is centered vertically relative to the top half of the page. Two horizontal grey bars are present: one on the left side of the page, extending from the left edge to the start of the letter 'P', and another on the right side, extending from the end of the letter 'P' to the right edge. Both bars are of equal height and are positioned at the same vertical level as the top of the letter 'P'.

P

Příloha B

PŘÍLOHA B | Příklad ukázkové úlohy pro hodnocení tvůrčího myšlení v PISA 2022

Jako ilustrativní příklad uvádíme ukázkovou úlohu¹⁴ z oblasti písemného projevu, která je členěna na tři otázky. Každá otázka se zaměřuje na jiný aspekt tvůrčího myšlení. Více ukázkových úloh z ostatních oblastí tvůrčího myšlení lze nalézt na <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA-2021-Creative-Thinking-Framework.pdf>.

PISA Tvůrčí myšlení – ukázková úloha
? ◀ ▶

Písemný projev
Otázka 1 / 3

Podívej se na obrázek vpravo.

Hraješ hru, kde musíš hodit kostkami a poté spojit obrázky, které se objeví lícem nahoru. Tyto obrázky jsou inspirací pro tvůj příběh. Jako rozcvičku použiješ pouze dvě kostky.

Napiš 2 různé příběhy, které se vztahují k obrázkům vpravo. Tyto dva příběhy by měly být od sebe co nejvíce odlišné. Práce by ti neměla trvat déle než 7 minut a nepoužívej více než 80 slov.

Příběh 1

Příběh 2

KOSTKY A PŘÍBĚHY



¹⁴ Tato ukázková úloha nebyla do šetření PISA 2022 zahrnuta.

PISA Tvůrčí myšlení – ukázková úloha

**Písenný projev**

Otázka 2 / 3

Podívej se na obrázek vpravo.

Nyní, když máš tuto hru nacvičenou, pokus se napsat jeden kreativní příběh, který se váže k šesti vpravo zobrazeným obrázkům. Tvůj příběh získá vysoké hodnocení, pokud bude originální, prokáže bohatou fantazii a bude dobře strukturovaný.

Práce by ti neměla trvat déle než 5 minut a nepoužívej více než 80 slov.

Sem napiš svůj příběh:

KOSTKY A PŘÍBĚHY

PISA Tvůrčí myšlení – ukázková úloha

**Písenný projev**

Otázka 3 / 3

Podívej se na obrázek a text vpravo.

Nyní hraješ variantu hry, kdy vytváříš příběh společně s kamarádem. Přečti si začátek příběhu, který tvůj kamarád s využitím šesti obrázků napsal. Obrázky vidíš v pravé části nahoře. Ty budeš v příběhu pokračovat a využiješ k tomu tři obrázky, které vidíš v pravé části dole. Napiš kreativní pokračování příběhu tvého kamaráda a snaž se navázat na jeho inspiraci a styl.

Práce by ti neměla trvat déle než 5 minut a nepoužívej více než 80 slov.

KOSTKY A PŘÍBĚHY

Šest obrázků, které využil tvůj kamarád.



Příběh tvého kamaráda

Tři obrázky, které musíš použít k pokračování příběhu.



Sem napiš pokračování:





Fráni Šrámka 37 | 150 21 Praha 5 | www.csicr.cz