INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PISA 2012
Matematický koncepční rámec

Matematický koncepční rámec PISA 2012 vysvětluje teoretická východiska šetření PISA v matematice, předkládá novou formální definici matematické gramotnosti, definici matematických postupů, které žáci používají při aplikování matematické gramotnosti, a definici základních matematických dovedností, jež žáci potřebují pro tyto postupy. Koncepční rámec rozděluje matematický obsah do čtyř okruhů, přičemž jednotlivé okruhy vymezují matematický obsah, jehož znalost je v projektu PISA hodnocena u patnáctiletých žáků. Rámec dále popisuje čtyři okruhy kontextů, ze kterých vycházejí matematické úlohy, stanovuje zastoupení jednotlivých položek podle obsahu, kontextu, formátu odpovědi a zkoumaných postupů, popisuje podobu testovacích sešitů a dotazníků. Základní podmínkou je, aby každý sešit obsahoval různě obtížné úlohy. Rámec také popisuje mechanizmy kontroly kvality a zabývá se novým nepovinným testováním matematiky prováděným na počítačích. Tuto formu testování zdůvodňuje a zkoumá potenciál jejího dalšího využití. Jednotlivé okruhy jsou ilustrovány na sedmi úlohách, které byly použity v šetřeních PISA. Záměrem projektu PISA je měřit, jak efektivně jednotlivé země připravují své žáky na používání matematiky ve všech oblastech osobního, občanského i profesního života a do jaké míry je pro žáky matematika součástí konstruktivního a uvědomělého občanství.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

OBSAH

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost ČŠI Česká školní inspekce
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚVOD

Hodnocení výsledků v matematice má v šetření PISA 2012 ústřední význam, protože se matematika stala hlavní hodnocenou oblastí. Výsledky v matematice sice byly hodnoceny již v šetřeních PISA 2000, 2003, 2006 a 2009, ale ústřední roli hrála matematika pouze v roce 2003.

Návrat matematiky na pozici hlavní testované oblasti v roce 2012 umožňuje nejen porovnat vývoj výsledků žáků v průběhu času, ale zároveň nabízí možnost znovu zjišťovat a zvážit, co přesně je hodnoceno, neboť v mezidobí došlo ke změnám jak ve vzdělávací politice v jednotlivých zemích, tak ve vyučovací praxi. V tuto chvíli je třeba vytvořit aktualizovanou koncepci matematické gramotnosti, která umožní reflektovat současný stav a zároveň zachovat psychometrickou návaznost na předchozí matematická testování. Koncepce PISA 2012 byla vytvořena tak, aby se matematika stala pro patnáctileté žáky jasnější, srozumitelnější a zároveň aby testovací úlohy vycházely ze smysluplných a autentických kontextů. Cyklus matematického modelování, který byl používán v předchozích koncepcích (např. OECD, 2003) pro popis jednotlivých fází, jimiž žáci procházejí při řešení úloh, je základním stavebním kamenem i v šetření PISA 2012 a je využíván pro vymezení matematických postupů, které žáci volí při řešení úloh. Rozdíl je ale v tom, že tyto postupy se v PISA 2012 stávají základním referenčním rámcem. V roce 2012 je také poprvé nabízeno nepovinné testování matematiky prostřednictvím počítačů (Computer-based assessment of mathematics CBAM).

Matematický koncepční rámec PISA 2012 je rozdělen do několika hlavních částí. V první části „Definice matematické gramotnosti“ jsou vysvětlena teoretická východiska matematického testování PISA, a to včetně formální definice konstruktu matematická gramotnost. Druhá část „Uspořádání oblasti“ popisuje tři aspekty: *i*) matematické postupy a základní matematické dovednosti nezbytné po tyto postupy (v předchozích koncepcích označované jako *„kompetence“*); *ii*) způsob, jak jsou v koncepci PISA 2012 uspořádány znalosti matematického obsahu, a znalosti, které jsou testovány u patnáctiletých žáků (je popsáno dílčí bodování jak ve třech kategoriích matematických postupů, tak ve čtyřech okruzích matematického obsahu); *iii*) kontexty, ze kterých budou úlohy vycházet. Třetí část „Hodnocení matematické gramotnosti“ podává přehled strukturálních otázek testování, včetně pracovní verze testu a dalších technických informací. V dodatcích jsou uvedeny další popisy základních matematických dovedností, několik ukázkových úloh z šetření PISA a seznam literatury.

Koncepční rámec byl vypracován pod vedením Matematické expertní skupiny (Mathematics Expert Group [MEG]), orgánu jmenovaného hlavními realizátory PISA, se souhlasem správní rady PISA (PISA Governing Board [PGB]). Mezi deseti členy expertní skupiny jsou zastoupeni matematici, didaktici matematiky a odborníci v oblasti testovacích technologií a pedagogického výzkumu z několika zemí. Větší šíři vstupních informací a kritických komentářů k návrhu matematického koncepčního rámce PISA 2012 zajistilo rozeslání 170 odborníkům-matematikům z více než 40 zemí. Organizace Achieve a Australská rada pro výzkum ve vzdělávání (Australian Council for Educational Research [ACER]), dvě organizace pověřené Organizací pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (OECD) přípravou koncepčního rámce, provedly další výzkumy s cílem poskytnout podporu při práci na přípravě koncepce. Předběžné práce na koncepci i projektu PISA podporuje také výzkumná činnost v mnoha dalších zemích (příkladem je výzkum popsaný v publikaci OECD z roku 2010 *Pathways to Success: How Knowledge and Skills at Age 15 Shape Future Lives in Canada – Cesty k úspěchu: Jak znalosti a dovednosti patnáctiletých žáků utvářejí jejich další život*).

DEFINICE MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI

Má-li být mladý člověk připraven na život v dnešní společnosti, musí rozumět matematice, neboť množství problémů a situací z běžného i profesionálního života, pro jejichž pochopení a řešení je nezbytná jistá úroveň matematických znalostí, matematického myšlení a zvládání matematických nástrojů, stále roste. Matematika se stává jedním z klíčových nástrojů, který mladí lidé potřebují, mají-li zvládat výzvy a problémy v osobním, profesním, společenském i vědeckém životě, proto musíme porozumět tomu, jak efektivně umějí absolventi škol používat matematiku při řešení problémů. Testování patnáctiletých žáků je vhodným včasným indikátorem toho, jak budou mladí lidé v dalším životě reagovat na různé situace, které vyžadují aplikaci matematiky.

Základem koncepce mezinárodního srovnávání patnáctiletých žáků by měla být následující otázka: „Co potřebují občané znát a umět v situacích, jež obsahují matematiku?“ Jinými slovy: co přesně obnáší matematická kompetence u patnáctiletých žáků, kteří plánují odejít ze školy, a co u těch, kteří chtějí pokračovat ve studiích, dále si zvyšovat kvalifikaci a připravovat se na přijímací zkoušky na vysoké školy? Matematickou gramotnost je třeba chápat jako

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

schopnost jednotlivce formulovat, používat a interpretovat matematiku v různých kontextech, nikoli jako synonymum minimálních znalostí a dovedností. Měla by spíše popisovat schopnost jednotlivce matematicky myslet a používat matematické pojmy, postupy, fakta a nástroje k tomu, aby popisoval, vysvětloval a předpovídal různé jevy. Takové pojetí matematické gramotnosti akcentuje význam dobrého porozumění pojmům čisté matematiky a užitek, jaký žákům přináší bádání v abstraktním světě matematiky. Pojem matematické gramotnosti, jak je vymezena v koncepčním rámci PISA, přikládá velký význam rozvíjení schopnosti žáků používat matematiku v kontextu. Tato schopnost je závislá na tom, zda s ní žáci mají dostatečně bohaté zkušenosti z hodin matematiky, což platí jak pro ty patnáctileté žáky, jejichž formální matematické vzdělání je téměř u konce, tak pro ty, kteří v něm budou pokračovat. Navíc se dá říci, že motivace učit se matematiku roste, pokud má její výuka vztah ke světu mimo školu a k tomu, co se učí v jiných předmětech.

Matematická gramotnost pochopitelně přesahuje věkové hranice, nicméně při hodnocení patnáctiletých žáků je třeba brát v potaz všechna specifika vybrané věkové skupiny a nezbytně určit tematické okruhy, které jsou věkově, jazykově i kontextově přiměřené. Koncepční rámec předkládá jak široké tematické okruhy obecně významné z hlediska matematické gramotnosti, tak témata vhodná právě pro testovanou věkovou skupinu. Matematická gramotnost není vlastnost, kterou někdo má, nebo nemá, musíme spíše hovořit o kontinuu více či méně gramotných jedinců, přičemž všichni mají potenciál dále se zlepšovat.

PISA 2012 definuje matematickou gramotnost následovně:

> *Matematická gramotnost je schopnost jedince formulovat, používat a interpretovat matematiku v různých kontextech. Zahrnuje matematické myšlení, používání matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů k popisu, vysvětlování a předpovídání jevů. Pomáhá jedinci si uvědomit, jakou roli matematika hraje ve světě, a díky tomu správně usuzovat a rozhodovat se tak, jak to vyžaduje konstruktivní, angažované a reflektivní občanství.*

Následující poznámky zdůrazňují a vysvětlují nejpodstatnější aspekty předložené definice.

Pojetí žáků jako aktivních řešitelů úloh

Výrazové prostředky použité v definici matematické gramotnosti kladou důraz na aktivní práci žáků v matematice a zahrnují matematické uvažování a používání matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů pro popisování, vysvětlování a předpovídání jevů. Konkrétně slovesa „formulovat“, „používat“ a „interpretovat“ označují tři postupy, v nichž mají žáci roli aktivních řešitelů. *Formulovat* matematiku znamená identifikovat příležitosti, kdy ji lze aplikovat – uvědomit si, že pro pochopení či řešení konkrétního problému nebo výzvy je vhodným nástrojem právě matematika. To s sebou nese schopnost uchopit určitou situaci a převést do formy vhodné pro matematické řešení tím, že jí dáme matematickou strukturu nebo ji matematicky znázorníme, určíme proměnné a vyslovíme zjednodušující předpoklady, abychom se dostali k řešení problému. *Používat* matematiku znamená užívat matematické uvažování a matematické pojmy, postupy, fakta a nástroje k nalezení matematického řešení. Patří sem výpočty, úpravy algebraických výrazů a rovnic či jiných matematických modelů, analýza matematických informací z diagramů a grafů, vytváření matematických popisů a vysvětlení a využívání matematických nástrojů pro řešení problémů. *Interpretovat* matematiku znamená zvažovat matematická řešení či výsledky a interpretovat je v kontextu problému či situace. Patří sem zhodnocení matematických řešení a uvažování v kontextu problému nebo určování, zda jsou výsledky rozumné a v daném kontextu smysluplné.

Jazyk definice se také snaží zahrnout pojem matematického modelování, který byl od samého počátku základním kamenem matematické koncepce PISA (např. OECD, 2003), přímo do definice matematické gramotnosti, jak ji uvádí koncepční rámec PISA 2012. Když jedinec používá matematiku a její nástroje při řešení problémů, prochází několika fázemi. Obrázek 1.1 předkládá souhrn základních pojmů tohoto koncepčního rámce a ukazuje jejich vzájemnou souvislost.

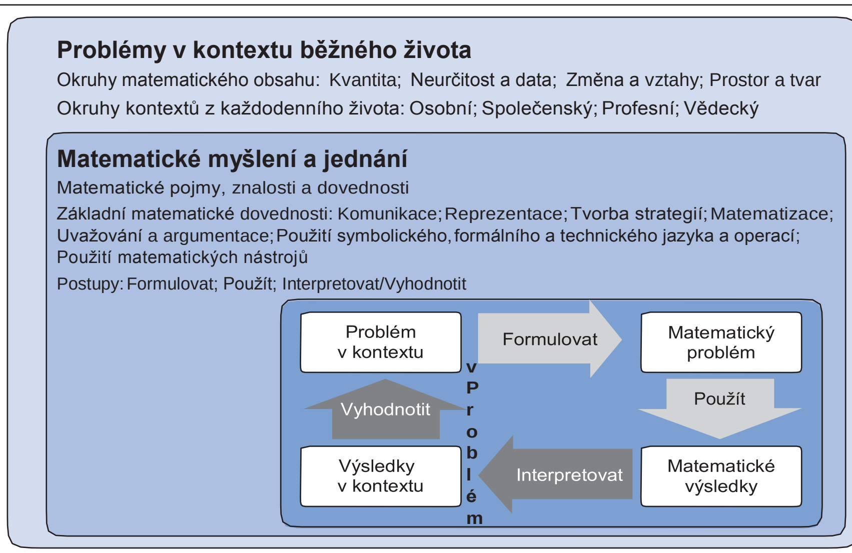
- Vnější pole obrázku 1.1 ukazuje, že matematickou gramotnost využíváme v kontextu problémů z reálného světa. Koncepční rámec tento typ problémů charakterizuje dvěma způsoby. Kontextové okruhy, které budou podrobně představeny níže, popisují oblasti života, v nichž podobné problémy vznikají. Kontext může být *osobní*, problémy se týkají přímo jedince, jeho rodiny či přátel a blízkého okolí. Problém ale může také vyvěrat ze *společenského* kontextu (z vlastní komunity – ať už místní, národní či globální), z *profesního* kontextu (svět práce) nebo z *vědeckého* kontextu (souvisejícího s aplikací matematiky ve světě vědy a technologií). Pro charakteristiku

problému je dále určující podstata matematického jevu, který je jeho základem. Čtyři okruhy matematického obsahu definují velké skupiny jevů, kvůli jejichž zkoumání se matematika vyvinula. Tyto okruhy (*kvantita, neurčitost a data, změna a vztahy, prostor a tvar*) jsou uvedeny ve vnějším poli obrázku 1.1.

- Při řešení problémů z různých kontextů musí jedinec matematicky myslet a jednat. To je v koncepčním rámci charakterizováno třemi způsoby. Obrázek 1.1 ukazuje, že jedinec musí při práci stavět na různých matematických pojmech, znalostech a dovednostech. Z těchto matematických znalostí pak čerpá, když reprezentuje matematiku a komunikuje o ní, vymýšlí strategie, odůvodňuje, formuluje argumenty apod. Tyto matematické činnosti jsou v koncepčním rámci popsány pomocí sedmi základních dovedností, které budou detailně popsány níže. Když jedinec řeší problém – což může vyžadovat formulaci problému, použití matematických pojmů a postupů nebo interpretaci matematického řešení – zároveň nebo postupně aktivizuje základní matematické dovednosti, a to s ohledem na matematický obsah. Jeho cílem je nalézt řešení.

Znázorněný cyklus matematického modelování ve vnitřní části obrázku 1.1 ukazuje idealizovanou a zjednodušenou verzi fází, jimiž řešitel prochází, když uplatňuje svou matematickou gramotnost. Předkládá idealizovanou sekvenci fází, která začíná „problémem v kontextu“. Řešitel se v problémové situaci snaží najít matematiku a situaci matematicky *formuluje* na základě odhalených matematických pojmů, vztahů a zjednodušujících předpokladů. Tím převede „problém v kontextu“ na „matematickou úlohu“, kterou lze řešit matematicky. Šipka směřující v obrázku 1.1 dolů popisuje, co řešitel vykonává, když *používá* matematické pojmy, postupy, fakta a nástroje pro získání „matematických výsledků“. Tato fáze obvykle obnáší matematické uvažování, úpravy, transformace a výpočty. Potom je třeba „matematické výsledky“ *interpretovat* v kontextu původního problému („výsledky v kontextu“). V této fázi řešitel interpretuje, aplikuje a vyhodnocuje matematické výsledky a jejich smysluplnost v kontextu původního problému z reálného života. Činnosti *formulování, používání* a *interpretování* matematiky jsou klíčovými složkami cyklu matematického modelování i klíčovými prvky definice matematické gramotnosti. Všechny tyto tři procesy jsou postaveny na základních matematických dovednostech, které zase vycházejí z dobrých řešitelových matematických znalostí daného tématu.

Obrázek 1.1
Model matematické gramotnosti v praxi



v kontext

Cyklus modelování je pro pojetí žáka jako aktivního řešitele úloh a problémů v projektu PISA klíčový; je ale pravda, že ne vždy je nutné, aby žák prošel všemi fázemi cyklu, a to obzvláště v kontextu testování (Niss a kol., 2007). Často se stává, že podstatnou část cyklu matematického modelování už za nás udělal někdo jiný a nám zbývá vykonat jen několik kroků cyklu. Proto jsou v některých případech žákům předloženy matematické reprezentace, např. grafy nebo rovnice, které stačí jen upravit, aby žáci mohli odpovědět na některé otázky nebo došli k nějakým závěrům. To je také důvod, proč mnoho testových úloh PISA zahrnuje jenom část cyklu modelování. Každý postup může představovat velký problém, proto je někdy třeba projít celým cyklem několikrát, než se podaří úlohu vyřešit. Ve skutečném světě může řešitel mezi postupy a procesy oscilovat, vracet se k dřívějším rozhodnutím a předpokladům.

Konkrétní propojení úloh s různými kontexty PISA 2012

„Různorodost kontextů“ zmíněná v definici matematické gramotnosti má vést k propojení definice se specifickými kontexty, které budou blíže popsány a ilustrovány v dalším textu. Specifické kontexty samy o sobě nehrají významnou roli, ale čtyři okruhy kontextů zvolené pro toto testování (osobní, profesní, společenský a vědecký) v sobě zahrnují celou řadu situací, v nichž se jedinci setkávají s matematikou. Definice také říká, že matematická gramotnost pomáhá jedinci uvědomit si roli, jakou matematika ve světě hraje, a dělat odůvodněná rozhodnutí. To vše od něj vyžaduje konstruktivní, angažované a uvědomělé občanství.

Významná role matematických nástrojů včetně technologií v koncepci PISA 2012

Definice matematické gramotnosti explicitně hovoří o používání matematických nástrojů. Tyto nástroje tvoří fyzická a digitální zařízení, software a výpočetní technika[1]. Počítačové matematické nástroje jsou ve 21. století na pracovištích zcela běžné a jejich význam i dostupnost budou nadále růst. Charakter problémů v pracovní praxi i logické uvažování o těchto problémech se díky možnostem výpočetní techniky rychle mění – a to klade další nároky na matematickou gramotnost.

Testování matematiky na počítačích je v šetření PISA 2012 novinkou, proto je v tuto chvíli pro zúčastněné země nepovinné. Je zjevné, že zahrnutí matematických nástrojů v definici matematické gramotnosti je více než vhodné. Ve všech dosavadních testováních PISA směli žáci používat, pokud to bylo v dané zemi při testování praxí, kalkulačky. Testové položky byly tvořeny tak, aby byly z hlediska přístupu ke kalkulačkám pokud možno neutrální a bylo je možné řešit i bez použití kalkulačky. V testových úlohách v šetření PISA 2012 už ale může žákům použití kalkulačky přinést prospěch; a v nepovinném testování na počítači budou matematické nástroje jako například online kalkulačka přímo součástí některých testových položek. Vzhledem k tomu, že testové položky projektu PISA mají odrážet problémy z osobního, profesního, společenského a vědeckého kontextu, kde se kalkulačky běžně používají, může v některých položkách značně usnadnit práci. Testování na počítači poskytuje možnost využít širší škálu matematických nástrojů – například statistický software, nástroje pro geometrické konstrukce a vizualizace, virtuální nástroje k měření. Tyto nástroje jsou přímo součástí zadání úloh, neboť při řešení problémů v reálném světě jsou zmíněná média stále častěji využívána. Testování na počítači navíc umožňuje hodnotit ty aspekty matematické gramotnosti, které při tradičním testováním nelze hodnotit.

USPOŘÁDÁNÍ OBLASTI

Koncepční rámec projektu PISA definuje oblast matematiky pro testování a popisuje, jak u patnáctiletých žáků hodnotit matematickou gramotnost. Projekt PISA tedy hodnotí, do jaké míry jsou patnáctiletí žáci schopni adekvátně uchopit matematiku v situacích, které to vyžadují, proto většina situací a úloh vychází z kontextů reálného světa.

Definici matematické gramotnosti, jak je uvedena v koncepčním rámci šetření PISA 2012, lze analyzovat třemi souvisejícími hledisky:

- matematické *postupy*, jež zachycují, co žáci dělají, když propojují kontext problému s matematikou, aby ho mohli vyřešit, a základní dovednosti, jež jsou pro tyto postupy nezbytné;
- matematický *obsah*, jehož použití je cílem testové položky;
- *kontext*, z něhož testová položka vychází.

Tato tři hlediska jsou detailně rozpracována v následujícím textu a matematický koncepční rámec šetření PISA 2012 je zdůrazňuje právě proto, aby zajistil, že testové položky odrážejí širokou škálu postupů, obsahů a kontextů. Díky tomu položky efektivně operacionalizují výše uvedenou definici matematické gramotnosti. Toto uspořádání koncepčního rámce vychází z několika otázek, které souvisejí s definicí matematické gramotnosti:

- Jaké postupy jedinci používají, když řeší kontextualizované matematické úlohy? Jaké dovednosti očekáváme, že budou jedinci schopni prokázat, když se bude jejich matematická gramotnost rozvíjet?
- Jaké znalosti matematického obsahu můžeme předpokládat, že jedinci mají – konkrétně patnáctiletí žáci?
- V jakých kontextech lze pozorovat a hodnotit matematickou gramotnost?

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické postupy a základní matematické dovednosti

Matematické postupy

Definice matematické gramotnosti hovoří o schopnosti jedince *formulovat, používat* a *interpretovat* matematiku. Právě slova „formulovat“, „používat“ a „interpretovat“ tvoří dobrý základ pro uspořádání matematických postupů, které zachycují, co se odehrává, když jedinec propojuje kontext zadání úlohy nebo problému s matematikou a tak ho řeší. V šetření PISA 2012 jsou výsledky sdělovány právě prostřednictvím těchto matematických postupů, což pro interpretaci výsledků umožňuje použít následující kategorie:

- *formulování* situací matematicky;
- *používání* matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování;
- *interpretování*, aplikace a hodnocení matematických výsledků.

Je důležité, aby politici i učitelé z praxe věděli, jak účinně jsou žáci schopni tyto postupy používat. Výsledky projektu PISA v kategorii *formulování* ukazují, jak efektivně žáci poznají možnost použít matematiku v problémových situacích a jak jsou potom schopni dát situaci potřebnou matematickou strukturu. Díky tomu pak mohou kontextualizovaný problém formulovat jako matematickou úlohu. Co se týká kategorie *používání*, výsledky projektu PISA naznačují, jak dobře žáci používají výpočty a úpravy, jak efektivně aplikují známé pojmy při úspěšném řešení zformulované matematické úlohy. Výsledky projektu PISA v kategorii *interpretování* prezentují, jak efektivně žáci umějí reflektovat matematická řešení či závěry, interpretovat je v kontextu problému z reálného světa a rozhodnout, zda dávají výsledky v reálném světě smysl. Obratnost, s jakou žáci používají matematiku v reálných situacích, závisí na dovednostech souvisejících se všemi těmito kategoriemi. Porozumění úspěšnosti žáků v každé ze tří kategorií by mělo přispět k tomu, aby se odborná diskuze i kurikulární rozhodnutí přiblížily realitě výuky.

Formulování situací matematicky

Slovo „formulovat“ v definici matematické gramotnosti odkazuje na schopnost rozpoznat příležitost pro použití matematiky v problémových situacích a schopnost vtisknout situaci potřebnou matematickou strukturu. V průběhu *formulování situací matematicky* rozhodujeme, jaké matematické pojmy a postupy potřebujeme k analýze, formulování a řešení úlohy. Překládáme ji z kontextu reálného světa do oblasti matematiky, dáváme problému z reálného světa matematickou strukturu a reprezentaci, zvažujeme omezení a předpoklady úlohy. Konkrétně zahrnuje *formulování situací matematicky* například následující činnosti:

- určení matematických stránek problému v reálném kontextu a určení důležitých proměnných;
- rozpoznání matematické struktury (včetně pravidelností, vztahů a schémat) problémů a situací;
- zjednodušení situace nebo problému tak, aby ho bylo možné podrobit matematické analýze;
- určení omezujících podmínek a předpokladů nutných pro matematické modelování a zjednodušení vycházející z kontextu;
- matematická reprezentace situace za použití vhodných proměnných, symbolů, schémat a standardních modelů;
- reprezentace problémové situace jiným způsobem, včetně jejího uspořádání podle matematických pojmů, a určení vhodných předpokladů;
- porozumění a vysvětlení vztahů mezi jazykem vázaným na kontext a symbolickým a formálním jazykem nutným pro matematickou reprezentaci;
- překlad problémové situace do jazyka matematiky či matematické reprezentace;
- určení, které stránky problémové situace odpovídají známým matematickým úlohám, pojmům nebo postupům;
- využití informačních technologií (například tabulkového procesoru, kalkulátorů pro tvorbu grafů) ke znázornění matematických vztahů ukrytých v kontextualizovaném problému.

Zveřejněná testová položka *PIZZY* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) vyžaduje, aby žáci uměli formulovat situaci matematicky. Žáci sice musejí při řešení úlohy provádět početní operace a výsledky výpočtu aplikovat, aby určili, která pizza je za danou cenu nejvýhodnější, kognitivně výrazně náročnější je ale formulovat matematický model „výhodná koupě“. Žák si musí uvědomit, že vzhledem k tomu, že pizzy jsou stejně silné, ale mají různé průměry, je třeba analyzovat obsah kruhu. Vztah mezi množstvím pizzy a množstvím peněz pak popisuje poměr hodnota-cena,

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

který lze modelovat jako cena za jednotku obsahu. Zveřejněná testová položka *ROCKOVÝ KONCERT* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) je dalším příkladem položky, jež je postavena na schopnosti žáků formulovat situaci matematicky, neboť od žáků očekává, že uchopí poskytnuté kontextualizované informace (např. velikost pole, fakt, že je koncert vyprodaný, fakt, že všichni fanoušci stojí) a že tyto údaje přeloží do vhodné matematické podoby, jež jim umožní odhadnout, kolik je na koncertu lidí.

Používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování

Slovo „používat“ v definici matematické gramotnosti hovoří o schopnosti aplikovat při řešení matematicky formulovaných úloh matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování. Když *používáme matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování* pro řešení úloh, provádíme takové operace a postupy, abychom získali výsledky a našli matematická řešení (například provádíme aritmetické výpočty, řešíme rovnice, vyvozujeme logické závěry z matematických předpokladů, provádíme symbolické úpravy, získáváme matematická data z tabulek a grafů, reprezentujeme tělesa v prostoru, manipulujeme s nimi a analyzujeme data). Pracujeme na modelu problémové situace, hledáme pravidelnosti, určujeme vztahy mezi matematickými pojmy a snažíme se matematicky argumentovat. Konkrétně *používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování* zahrnuje činnosti jako:

- navržení a realizace strategií hledání matematických řešení;
- využívání matematických nástrojů včetně informačních technologií, které jsou vhodné pro přesná a přibližná řešení;
- aplikace matematických faktů, pravidel, algoritmů a struktur při hledání řešení;
- práce s čísly, grafickými a statistickými daty a údaji, úpravy algebraických výrazů a rovnic a manipulace s geometrickými reprezentacemi;
- tvorba matematických nákresů, grafů, geometrických konstrukcí a získávání dat z těchto reprezentací;
- používání více forem reprezentace při hledání řešení a přechody mezi nimi;
- zobecňování na základě výsledků získaných při použití matematických postupů k hledání řešení;
- zvažování matematických argumentů, vysvětlování a odůvodňování matematických výsledků.

Zveřejněná testová úloha *CHŮZE* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) obsahuje položky, které jsou zcela založeny na schopnosti žáků *používat matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování*. Obě otázky této úlohy spočívají na použití daného modelu – vzorce, s jehož pomocí je možné určit délku kroku (otázka 1) nebo rychlost chůze (otázka 2). Obě otázky jsou v zadání vyjádřeny prostřednictvím matematické struktury a žáci mají při hledání řešení provést algebraické úpravy a výpočty. Podobně i zveřejněná testová úloha *TESAŘ* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) je postavena na schopnosti žáků *používat matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování*. Nejdůležitějším kognitivním procesem je najít strategii, jak zjistit údaje o celkové délce úseček, přičemž délka každé z nich je neznámá a je třeba vzájemně porovnávat jejich délky. Žáci také musí dát do souvislosti obvody načrtnutých záhonů s množstvím dřeva, které mají k dispozici. Tento proces formulování je ale výrazně méně náročný než proces uvažování o obvodech.

Interpretování, aplikace a hodnocení matematických výsledků

Slovo „interpretovat“ se v definici matematické gramotnosti vztahuje ke schopnosti provádět reflexi matematických řešení, výsledků či závěrů a interpretovat je v kontextu původní situace z běžného života. To zahrnuje přeložení matematických řešení a úvah zpět do kontextu zadání a rozhodnutí, zda v tomto kontextu výsledky dávají smysl. Tato kategorie se ve schématu 1.1 s ilustrací matematické gramotnosti týká šipek „interpretovat“ a „vyhodnotit“. Žáci musí v této fázi vysvětlovat a argumentovat v kontextu zadání, musí reflektovat proces modelování i jeho výsledky. Konkrétně *interpretování, aplikace a hodnocení matematických výsledků* zahrnuje následující činnosti:

- interpretace matematického výsledku v rámci původní situace z běžného života;
- zhodnocení smysluplnosti matematického řešení v kontextu původní situace z běžného života;
- pochopení, jaký vliv má reálný svět na výsledky a výpočty v rámci matematického postupu nebo modelu, díky čemuž lze zhodnotit, jak by se tyto výsledky měly přizpůsobit či aplikovat;
- vysvětlení, proč je nebo není daný matematický výsledek či řešení smysluplné v kontextu původní situace;
- pochopení rozsahu a hranic matematických pojmů a matematických řešení;
- kritické zhodnocení a určení hranic funkčnosti použitého modelu řešení.

Zveřejněná úloha *ODPADKY* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) od žáků vyžaduje schopnost *interpretovat, aplikovat a hodnotit* matematické výsledky. Položka se zaměřuje na hodnocení smysluplnosti matematického výsledku – v tomto případě pomyslného nebo načrtnutého sloupcového grafu –, který zachycuje data podle času rozkladu a typu odpadu. Položka vyžaduje uvažování o předložených datech a způsobu jejich prezentace i zhodnocení výsledku. Řešitel musí vysvětlit, proč se v tomto případě sloupcový diagram nehodí pro prezentaci dat.

Základní matematické dovednosti na pozadí matematických postupů

Desetiletá zkušenost s tvorbou testových položek projektu PISA a s analýzou způsobů, jakými na tyto položky reagují žáci, ukazuje, že každý z výše uvedených matematických postupů i matematická gramotnost jako taková vychází ze souboru základních matematických dovedností. Mogens Niss a jeho dánští kolegové (Niss, 2003; Niss a Jensen, 2002; Niss a Højgaard, 2011) stanovili osm základních dovedností – podle Nisse i koncepčního rámce OECD z roku 2003 (OECD, 2003) „kompetencí“ – potřebných pro matematické jednání. V koncepčním rámci PISA 2012 je definice souboru těchto základních dovedností upravena. Na základě výzkumu kompetencí používaných dříve v administrovaných testových položkách projektu PISA, který byl proveden Matematickou expertní skupinou, byl počet uváděných dovedností snížen na sedm (Turner a kol., v tisku). O potřebě definovat soubor základních matematických dovedností, jenž by doplnil znalosti specifických matematických obsahů, se ví již dlouho. Příkladem tohoto trendu je osm matematických postupů definovaných v základních standardech v USA (Common Core State Standards in the United States, 2010), čtyři základní matematické procesy (reprezentace, analýza, interpretace a hodnocení, komunikace a reflexe) definované v anglickém národním kurikulu pro matematiku (England’s Mathematics National Curriculum, Qualifications and Curriculum Authority, 2007) a standardy uváděné Národní radou učitelů matematiky – National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), „Principles and Standards for School Mathematics“ (NCTM, 2000). Tyto kognitivní schopnosti musí jedinec získat či se je naučit, pokud chce porozumět světu matematicky, pokud chce matematicky uchopit každodenní situace a řešit problémy (Turner a Adams, 2012). Z toho plyne, že tyto základní dovednosti jsou v těžších testových položkách aktivovány ve větší míře a na vyšší úrovni, tudíž se mohly stát referenčním rámcem popisu různých úrovní osvojení matematické gramotnosti, o kterých hovořila již předchozí šetření PISA. Podrobněji o tom bude pojednáno níže (viz tabulka 1.1).

Podstatu tohoto koncepčního rámce tvoří následující popis sedmi základních matematických dovedností:

- *Komunikace*: Součástí matematické gramotnosti je *komunikace*. Jedinec nejprve zaregistruje určitý problém a to ho stimuluje k tomu, aby se snažil problémovou situaci pochopit. Čtení, porozumění výrokům, otázkám, úkolům či objektům a jejich interpretace nám umožňuje, abychom si vytvořili mentální model situace. Je to důležitý krok, chceme-li porozumět problému, vyjasnit si ho a formulovat ho. Průběh řešení může vyžadovat, abychom uměli shrnout a prezentovat průběžné výsledky. Po vyřešení problému pak bývá nutné toto řešení prezentovat ostatním, vysvětlit ho nebo odůvodnit.
- *Matematizace*: Matematická gramotnost může zahrnovat převedení problému z reálného světa do jeho čistě matematické podoby (což představuje např. strukturování, konceptualizaci, vyslovování hypotéz nebo vytvoření matematického modelu), dále interpretaci či vyhodnocení matematického výsledku nebo matematického modelu v kontextu původního problému. Pojem „matematizace“ odkazuje na ty základní matematické úkony, které jsou k tomu potřeba.
- *Reprezentace*: Matematická gramotnost dále zahrnuje *reprezentování* matematických objektů a situací. Patří sem výběr vhodné reprezentace, interpretace, překládání z jedné formy reprezentace do jiné a současné využití několika forem reprezentace. Cílem těchto činností je zachytit situaci, reagovat na problém nebo prezentovat vlastní práci. Reprezentace může mít formu grafů, tabulek, schémat, obrázků a náčrtů, rovnic, vzorců či konkrétních materiálů.
- *Uvažování a argumentace*: Dovednost, která je potřeba při mnoha různých matematických činnostech a na různých úrovních matematické gramotnosti, se nazývá *uvažování a argumentace*. Tato dovednost zahrnuje logické myšlenkové procesy, s jejichž pomocí zkoumáme a dáváme do souvislostí různé prvky úlohy či problému, abychom mohli vyvozovat logické důsledky, ověřili předložená vysvětlení nebo sami odůvodnili výroky a řešení problémů.
- *Navržení strategií řešení problému*: Matematická gramotnost často vyžaduje *navržení strategií vhodných pro řešení situace* matematicky. K tomu je třeba ovládat soubor kritických kontrolních mechanizmů, díky nimž identifikujeme, formulujeme a řešíme problémy a úlohy. Tuto dovednost můžeme charakterizovat jako vybírání nebo navržení plánu či strategie, jež nám umožní řešit matematicky problém, který vyvstává z určitého úkolu či situace. Jde také

o kontrolu postupu řešení. Tato dovednost může být nutná v každé fázi řešení úlohy.

- *Používání symbolického, formálního a technického jazyka a operací*: Matematická gramotnost vyžaduje *používání symbolického, formálního a technického jazyka a operací*. To obnáší porozumění, interpretaci, úpravy a využití symbolických vyjádření, která se řídí matematickými konvencemi a pravidly, v matematickém kontextu (včetně aritmetických výrazů a operací). Patří sem také pochopení a používání formálních konstruktů, jež vycházejí z definic, pravidel a formálních systémů, a používání operací s těmito prvky. Používané symboly, pravidla a systémy závisejí na tom, jaký konkrétní matematický obsah potřebujeme k formulování, vyřešení a interpretaci matematiky.
- *Používání matematických nástrojů*: Poslední matematickou dovedností, kterou matematická gramotnost v praxi vyžaduje, je *používání matematických nástrojů*. K matematickým nástrojům řadíme jako fyzické nástroje nejen měřidla, ale také kalkulačky či stále více dostupné počítačové nástroje. Tato dovednost se skládá jak ze znalostí a dovedností v oblasti používání celé řady nástrojů, s jejichž pomocí můžeme vykonávat matematické aktivity, ale též ze znalostí hranic jejich využití. Matematické nástroje mohou hrát významnou roli při sdělování výsledků. V předchozích letech bylo v projektu PISA možné nástroje používat jen ve velmi omezené míře. Nepovinná část matematického testování PISA na počítači otevírá nové možnosti využití matematických nástrojů žáky, neboť umožní sledovat, jak žáci s těmito nástroji pracují v průběhu testování.

Tyto dovednosti se ve výše uvedených třech kategoriích matematických procesů objevují v různé míře. Jakým způsobem se projevují v jednotlivých kategoriích dovednosti, ukazuje obrázek 1.2. Detailnější informace o těchto dovednostech, konkrétně v souvislosti s obtížností testové položky, jsou uvedeny ve shrnutí v rámečku 1.1 „Základní matematické dovednosti a jejich souvislost s obtížností testové položky". Dále každá z úloh v části „Ukázkové úlohy z matematiky" ilustruje, jak konkrétně jsou v rámci řešení úlohy jednotlivé dovednosti aktivovány.

Znalosti matematického obsahu

Porozumění matematickému obsahu – a schopnost tyto znalosti aplikovat při řešením kontextualizovaných problémů a úloh – je v dnešním světě nesmírně důležité. Musíme umět řešit problémy, interpretovat situace v osobních, profesních, společenských i vědeckých kontextech a k tomu potřebujeme určité penzum matematických znalostí a porozumění problematice.

V historii vznikaly matematické struktury postupně právě jako prostředek porozumění přírodním a společenským jevům a jejich interpretace. Ve školách je obvykle matematický obsah uspořádán do tematických celků (např. čísla, algebra, geometrie) a látka je vybírána z historicky zavedených oborů matematiky. Tento systém samozřejmě usnadňuje tvorbu strukturovaného kurikula, když ale žáci opustí budovu školy, situace a problémy, jímž čelí, obvykle nedoprovází soubor pravidel a předpisů, které by jim ukazovaly cestu ke správnému řešení. Situace mimo školu obvykle vyžadují kreativitu, originální myšlenku, jež poradí, jak situaci uchopit a formulovat matematicky. Často se stává, že jednu situaci lze pojmout různými způsoby podle toho, jaké volíme matematické pojmy, postupy, fakta a nástroje.

Vzhledem k tomu, že cílem projektu PISA je hodnocení matematické gramotnosti, bylo třeba uspořádat matematický obsah podle matematických jevů, které jsou v pozadí širokých tříd problémů a byly impulzem pro rozvoj určitých matematických pojmů a postupů. Například matematický jev *neurčitost a změna* se projevuje v mnoha běžných situacích a pro jeho analýzu byly vyvinuty matematické strategie a nástroje. Tento přístup k uspořádání obsahu není novinkou, využívají ho například autoři známých publikací: *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990) a *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994).

Národní kurikula jsou obvykle uspořádána tak, že žákům v jednu chvíli poskytují znalosti a dovednosti související s jedním matematickým jevem. Pokud obsah uspořádáme v testech tímto způsobem, kopíruje struktura testu národní kurikula. Abychom pomohli autorům testových položek, nabízí tento rámec seznam kurikulárních témat, která jsou vhodná po testování matematické gramotnosti u patnáctiletých žáků. Tento seznam vznikl jako výsledek analýzy národních standardů v jedenácti různých zemích[2].

Chceme-li uspořádat oblast matematiky s cílem testovat matematickou gramotnost, musíme najít takovou strukturu, která reflektuje historický vývoj matematiky, je dostatečně variabilní i hluboká, aby na ní bylo možné ukázat základy matematiky, a obsahuje nebo přijatelně reprezentuje konvenční matematické prvky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obrázek 1.2

Vztah mezi matematickými postupy a základními matematickými dovednostmi

	***Formulování* situací matematicky**	***Používání* matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování**	***Interpretování*, aplikace a hodnocení matematických výsledků**
Komunikace	Čtení, porozumění výrokům, otázkám, úkolům či objektům, obrázkům a animacím (v případě testování na počítači) s cílem vytvořit mentální model situace.	Zformulování řešení, prezentace postupu vedoucího k řešení nebo shrnutí a prezentace průběžných matematických výsledků.	Formulace a prezentace vysvětlení a argumentů v rámci daného problému.
Matematizace	Určení matematických proměnných a struktur v problémové situaci z běžného života a vyslovení předpokladů, které lze použít.	Využití porozumění kontextu jako vodítka či usnadnění matematického řešitelského procesu, např. práce na takové úrovni přesnosti, která je daná kontextem.	Pochopení platnosti a omezení matematického řešení, oboje souvisí se zvoleným matematickým modelem.
Reprezentace	Matematická reprezentace informací z reálného světa.	Využití forem reprezentace, propojení různých forem reprezentace.	Interpretace matematických výsledků různým způsobem v rámci situace nebo konkrétního použití; porovnání a zhodnocení dvou nebo více forem reprezentace v rámci dané situace.
Uvažování a argumentace	Vysvětlení, obhajoba, odůvodnění objevené nebo odvozené reprezentace problému z reálného světa.	Vysvětlení, obhajoba, odůvodnění postupů použitých při hledání matematického výsledku nebo řešení. Nalezení souvislostí mezi izolovanými údaji, při hledání řešení, zobecňování nebo vytvoření vícekrokové argumentace.	Reflexe matematických řešení, tvorba a vysvětlení argumentů, které obhajují nebo vyvracejí matematické řešení problémové situace z reálného světa.
Navržení strategií řešení problému	Výběr nebo navržení plánu či strategie, které dají matematický rámec kontextualizovanému problému.	Aktivizace efektivních a stálých kontrolních mechanizmů ve všech fázích komplexního procesu, který vede k matematickému řešení, závěru nebo zobecnění.	Navržení a implementace strategie, která umožní interpretovat, zhodnotit a ověřit matematické řešení kontextualizované úlohy.
Používání symbolického, formálního a technického jazyka a operací	Používání vhodných proměnných, symbolů, diagramů a standardních modelů pro reprezentaci situace z reálného světa symbolickým/formálním jazykem.	Porozumění formálním konstruktům, které vyplývají z definic, pravidel i formálních systémů a používání algoritmů, a jejich aplikace.	Porozumění vztahu mezi kontextem problému či úlohy a reprezentací matematického řešení. Využití tohoto porozumění při interpretaci řešení v kontextu a při posuzování proveditelnosti a omezení řešení.
Používání matematických nástrojů	Používání matematických nástrojů pro určení matematické struktury nebo pro zachycení matematických vztahů.	Znalost a schopnost vhodně používat různé nástroje, s jejichž pomocí lze implementovat postupy matematického řešení.	Používání matematických nástrojů pro zjištění smysluplnosti matematického řešení a pro zjištění omezení takového řešení v kontextu daného problému či situace.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Z matematiky se s nástupem analytické geometrie a diferenciálního počtu v 17. století stalo ucelené studium čísel, tvarů, změn a vztahů; v 19. a 20. století je nástrojem řešení úloh analýza jevů jako náhodnost a neurčitost. Soubor *okruhů matematického obsahu* byl tedy pro šetření PISA 2012 zvolen tak, aby vycházel z širokého spektra matematických jevů, což odpovídá okruhům z předcházejících cyklů PISA.

Následující seznam okruhů matematického obsahu byl pro projekt PISA zvolen s ohledem na historický vývoj oboru a dále tak, aby pokrýval celou oblast matematiky a vycházel z jevů, které stimulovaly vývoj v matematice. Zároveň chce reflektovat hlavní témata školního kurikula. Vybrané čtyři okruhy charakterizují z hlediska matematiky klíčový obsah a ilustrují široké oblasti obsahu, z nichž v šetření PISA 2012 vycházejí autoři testových položek:

- *změna a vztahy;*
- *prostor a tvar;*
- *kvantita;*
- *neurčitost a data*[3].

Prostřednictvím těchto čtyř okruhů lze oblast matematiky uspořádat tak, aby testové položky pokrývaly různé části oboru a postihovaly důležité matematické jevy. Zároveň okruhy zabraňují příliš jemnému členění matematického obsahu, což by bylo na překážku při tvorbě bohatých a podnětných matematických úloh z reálného světa. Rozdělení na okruhy je podstatné pro tvorbu testových položek a interpretaci výsledků testování, nesmíme však zapomínat, že některá témata mohou zasahovat do více okruhů. Například v úloze *PIZZY* žáci určují, která ze dvou pizz s různým průměrem a stejnou tloušťkou je výhodnější (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“, kde je tato položka detailně popsána a analyzována). Tato položka vychází z několika matematických oblastí, jež zahrnují měření, kvantifikaci (poměr ceny a zboží, proporcionální uvažování a aritmetické výpočty), změny a závislosti (s ohledem na vztahy mezi proměnnými a na to, jak se podstatné vlastnosti mění s velikostí pizzy). Položka byla zařazena do okruhu *změna a vztahy*, protože pro její vyřešení je klíčová schopnost žáků dát do souvislosti obsahy obou pizz (pokud se změní průměr) a odpovídající změny v ceně. Je ale zjevné, že jiná testová úloha, ve které by se počítal obsah kruhu, by byla klasifikována jako *prostor a tvar.* Tato provázanost obsahových okruhů je důsledkem koherence matematiky jako vědy, proto se i v mnoha testových položkách vybraných pro šetření PISA 2012 setkáme s několika okruhy zároveň.

Široce koncipované obsahové okruhy a úžeji vymezené obsahové tematické celky vhodné pro patnáctileté žáky popsané níže mají reflektovat úroveň a šíři obsahu, který lze zařadit do šetření PISA 2012. Nejprve jsou popsány jednotlivé obsahové okruhy a jejich význam pro řešení kontextualizovaných úloh, poté následují konkrétnější definice druhů obsahu, které jsou vhodné pro testování matematické gramotnosti patnáctiletých žáků. V těchto tematických celcích se odráží to, co je očekáváno v různých zemích a vzdělávacích systémech. Standardy, jež byly při hledání těchto tematických celků analyzovány, dokládají nejen to, co se učí v hodinách matematiky, ale také ukazují, jaké znalosti a dovednosti jsou v různých zemích vnímány jako nezbytné pro to, aby z žáků vyrostli konstruktivní, aktivní a přemýšliví občané.

Výše uvedené čtyři kategorie – *změna a vztahy, prostor a tvar, kvantita, neurčitost a data* – charakterizuje následující popis znalostí matematického obsahu.

Změna a vztahy

V přirozeném i umělém světě existuje mezi objekty a podmínkami celá řada dočasných i trvalých vztahů, přičemž ke změnám dochází uvnitř systémů spolu souvisejících objektů, nebo v podmínkách, při nichž se navzájem ovlivňují různé objekty. V mnoha případech se změny projevují v průběhu času, jindy souvisí změna v jednom objektu nebo veličině se změnou v jiném objektu či veličině. V některých případech se jedná o nespojitou změnu, jindy jde o změnu spojitou. Některé vztahy jsou stabilní, neměnné. Vyšší úroveň gramotnosti v oblasti změny a vztahů obnáší schopnost rozpoznat základní druhy změn a pochopit, kdy k nim dochází, abychom při popisování a předpovídání změn uměli používat vhodné matematické modely. Matematicky to znamená nejen modelovat změnu a vztahy s pomocí odpovídajících funkcí a rovnic, ale také interpretovat a převádět data ze symbolických a grafických reprezentací těchto vztahů.

Změna a vztahy je kategorie, se kterou se setkáme v tak v odlišných kontextech jako jsou růst organizmů, hudba, roční období, počasí, zaměstnanost, ekonomická situace. Změnu zaznamenáváme, modelujeme a interpretujeme

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

s pomocí tradičních matematických obsahů „funkce“ a „algebra“, pomocí algebraických výrazů, rovnic a nerovnic, tabulek, grafických znázornění. Například testová úloha *CHŮZE* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) obsahuje dvě otázky, které spadají do kategorie *změna a vztahy,* protože se týkají algebraické závislosti dvou proměnných a vyžadují, aby žáci využili své znalosti a dovednosti z oblasti algebry. Žáci musí použít daný vzorec pro výpočet délky kroku – vzorec vyjádřený ve tvaru algebraického výrazu –, aby určili délku kroku v jedné otázce a rychlost chůze ve druhé. Změna a vztahy se často zachycují a interpretují pomocí statistiky. Chceme-li definovat a interpretovat *změnu a vztah*, je také třeba dobrá znalost oblasti čísel a jednotek. Zajímavé vztahy mají původ také v geometrických měřeních, např. možná závislost změny obsahu na změně průměru nebo vztahy mezi délkami stran trojúhelníku. Uvolněná úloha *PIZZY* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) je dalším příkladem kategorie *změna a vztahy*.

Nepovinné testování matematiky na počítačích v šetření PISA 2012 umožňuje, aby byly žákům předkládány dynamické obrázky a mnohonásobné, dynamicky propojené reprezentace. Dává však také příležitost manipulovat s funkcemi. Například změnu v čase (třeba růst nebo pohyb) lze zachytit přímo prostřednictvím animací a simulací, znázorníme ji pomocí navzájem propojených předpisů funkcí, grafů a tabulek. Hledání a používání matematických modelů změny lze obohatit, pokud lze změnu zkoumat a popisovat pomocí softwaru, který zakresluje grafy funkcí, nabízí změny parametrů, vytváří tabulky hodnot, umožňuje experimentování s geometrickými tvary, uspořádává a zakresluje data a dosazuje do vzorců. Obzvláště významné pro práci se vzorci a pro zakreslování dat jsou možnosti tabulkových a grafických editorů.

Prostor a tvar

Okruh *prostor a tvar* zahrnuje celou řadu jevů, se kterými se setkáváme každý den. Patří sem vzory, vlastnosti objektů, umístnění a orientace, reprezentace objektů, kódování a dekódování vizuálních informací, pohyb a dynamická interakce s reálnými útvary i jejich reprezentacemi. Základ kategorie *prostor a tvar* tvoří geometrie, ale kategorie překračuje hranice tradičních geometrických obsahů, významů i metod a využívá prvky z dalších oblastí matematiky, jako jsou prostorová představivost, měření a algebra. Například obrazce se mohou měnit a bod se může pohybovat po množině bodů daných vlastností a to již vyžaduje pojmy z oblasti funkcí. Ústřední roli v této kategorii hrají nejen vzorce pro výpočet obsahu, obvodu, povrchu a objemu, ale do tohoto obsahového okruhu patří také manipulace s útvary a jejich interpretace v prostředí, která požadují využití matematických nástrojů softwaru dynamické geometrie či například systém určení přesné polohy (GPS).

Koncepční rámec PISA vychází z předpokladu, že matematická gramotnost v oblasti *prostoru a tvaru* vyžaduje porozumění základním pojmům a zvládnutí základních dovedností. Matematická gramotnost v této kategorii zahrnuje činnosti jako porozumění perspektivě (například na obrazech), zakreslování map a orientace na nich, geometrické transformace s použitím technologie i bez ní, interpretace reprezentací trojrozměrných objektů z různých úhlů pohledu a konstrukce geometrických útvarů. Zveřejněná úloha *TESAŘ* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) spadá do tohoto okruhu, protože se zabývá další klíčovou vlastností prostoru a tvaru – vlastnostmi útvarů. Tato komplexní položka s možností výběru odpovědi předkládá žákům čtyři možné návrhy záhonu. Úkolem žáků je určit, který z nich lze ohraničit 32 metry prken. Řešení vyžaduje využití geometrických poznatků a uvažování, neboť žáci sice mají k dispozici dostatek údajů, aby mohli spočítat přesný obvod tří záhonů; ale údaje o čtvrtém záhonu jsou nepřesné a žáci musí použít schopnost geometrické dedukce.

Nepovinné testování na počítači žákům umožňuje manipulovat s dynamickými reprezentacemi útvarů a zkoumat vztahy mezi různými geometrickými objekty i vztahy uvnitř těchto objektů v trojrozměrném prostoru, neboť jimi lze otáčet a vytvořit si tak v mysli jasnou představu. Žáci mohou pracovat s mapami, které lze zvětšovat a otáčet, přitom si udělají jasnou představu o určitém místě, a tak použijí tyto nástroje k plánování trasy. Mohou si vybrat a použít virtuální nástroje pro měření (např. velikostí úhlů a délek úseček) na nákresech, obrázcích a modelech a tato data pak použít k výpočtům. Technologie žákům umožňují propojit znalosti z geometrie s vizuálními informacemi a vytvořit si tak jasnější představu o problému. Například chceme-li zjistit objem hrnku, můžeme s ním otáčet, abychom si ověřili, že jde o komolý kužel, abychom určili výšku a našli, kde ji lze změřit, a abychom došli k závěru, že útvary nahoře a dole, jež v rovině vypadají jako elipsy, jsou v trojrozměrném prostoru kruhy.

Kvantita

Pojem *kvantita* je nejrozšířenější a nejzákladnější stavební kámen matematiky. Patří sem kvantifikace vlastností objektů, vztahů, situací a entit ve světě, porozumění různým reprezentacím těchto kvantifikací a posuzování interpretací a argumentů založených na kvantitě. Pokud se snažíme kvantifikovat svět, musíme rozumět měření,

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

počtům, velikostem, jednotkám, ukazatelům, relativní velikosti, číselným trendům a pravidelnostem. Aspekty kvantitativního uvažování jako smysl pro čísla, různé formy reprezentace čísel, „elegance“ ve výpočtech, počítání zpaměti, odhad a posouzení, zda má výsledek smysl, tvoří v této kategorii základ matematické gramotnosti.

Kvantifikace je primární metodou pro popis a měření velkých souborů vlastností světa. Umožňuje nám modelovat situace, zkoumat změny a vztahy, popisovat prostor i tvary a manipulovat s nimi, organizovat a interpretovat data i měřit a vyhodnocovat neurčitost. Z toho plyne, že matematická gramotnost v této kategorii vyžaduje znalosti čísel a operací s nimi v celé řadě různých kontextů. Zveřejněná úloha *ROCKOVÝ KONCERT* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) je příkladem položky z okruhu kvantita. Žáci mají odhadnout celkový počet lidí, kteří přišli na koncert, když jsou dány rozměry obdélníkového pozemku, na němž se koná koncert. Položka sice obsahuje prvky z kategorie *prostor a tvar*, ale zásadní při jejím řešení je rozumně stanovit, kolik prostoru potřebuje jedna osoba, a poté se znalostí celkové plochy pozemku vypočítat přibližný počet účastníků koncertu. Vzhledem k tomu, že v této položce žák vybírá z několika odpovědí, může postupovat i opačně, když z celkové rozlohy pozemku a nabízených možností vypočítá prostor na osobu pro každou z možných odpovědí. Z výsledků pak vybere ten, který se jeví jako nejvíce smysluplný. Protože se odpovědi pohybují v řádu tisíců (např. 2000, 5000), žák také využije schopnost číselných odhadů.

Nepovinné testování na počítači dává žákům příležitost, aby maximálně využili výpočetní potenciál nových technologií. Je třeba si uvědomit, že výpočetní technika žákům usnadňuje provádění náročných početních operací a tím jim dává prostor využít kognitivní potenciál při hledání významu a strategií řešení úlohy. To ale neznamená, že by matematicky gramotný jedinec nemusel rozumět matematice. Pokud matematice nerozumí, může technologie využívat jen pro řešení rutinních úloh, což neodpovídá definici matematické gramotnosti tak, jak je uvedena v šetření PISA 2012. Využití technologií v nepovinném testování umožňuje zařadit položky, u nichž jsou numerické a statistické výpočty tak náročné, že by se nemohly objevit v klasickém testu.

Neurčitost a data

Neurčitost neodmyslitelně patří k vědě, technologiím i každodennímu životu, proto je také jádrem matematické analýzy mnoha problémových situací. Právě kvůli tomuto jevu vznikly teorie pravděpodobnosti a statistiky i způsoby reprezentace a popisu dat. Obsahový okruh *neurčitost a data* zahrnuje uvědomění si role variace, smysl pro kvantifikaci této variace, přiznání neurčitosti nebo chyby v měření a uvědomění si nahodilosti. Zahrnuje také formulování, interpretování a hodnocení závěrů, které vycházejí ze situací založených na neurčitosti. Klíčovými pojmy v této kategorii jsou *znázornění* a *interpretace* dat (Moore, 1997).

Ve vědeckých předpovědích, volebních výzkumech, předpovědích počasí a ekonomických modelech je vždy jistá míra neurčitosti a nejednoznačnosti. S variací se můžeme setkat ve výrobních procesech, výsledcích testů či šetřeních. Náhoda hraje zásadní roli v mnoha volnočasových aktivitách. Tradiční tematické celky *pravděpodobnost* a *statistika* žákům poskytují formální prostředky vhodné pro popis, modelování a interpretaci určité třídy jevů neurčitosti a pro vyslovování závěrů. Práci s úlohami v tomto obsahovém okruhu usnadňuje znalost čísel a některých aspektů algebry jako např. grafů a symbolické reprezentace. Zveřejněná úloha *ODPADKY* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“ na konci kapitoly) je zařazena do obsahového okruhu *neurčitost a data*. Žáci v jejím rámci musí zkoumat data předložená ve formě tabulky a vysvětlují, proč sloupcový diagram není vhodný pro prezentaci těchto dat. Právě interpretace a prezentace dat jsou důležitou stránkou okruhu *neurčitost a data*.

Nepovinné testování na počítači žákům umožňuje pracovat s většími soubory dat a nabízí jim výpočetní potenciál, aby práci s takto velkými soubory zvládli. Žáci si mohou vybrat nástroje, které jsou vhodné pro manipulaci s těmito daty, pro jejich analýzu a prezentaci, a které umožňují vybrat z dat vhodné vzorky. Navzájem propojené reprezentace žákům umožňují tato data zkoumat a popisovat různými způsoby. Možnost generovat náhodné výsledky včetně číselných umožňuje zkoumat pravděpodobnostní situace s pomocí simulací, například empirické pravděpodobnosti nebo vlastnosti vzorků.

Témata pro testování matematické gramotnosti u patnáctiletých žáků

Abychom dobře rozuměli kontextualizovaným úlohám, které se týkají okruhů *změna a vztahy, prostor a tvar, kvantita*, *neurčitost a data*, a abychom je mohli řešit, musíme ovládat celou řadu matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů, to vše na dostatečné úrovni. Projekt PISA, jehož cílem je měřit matematickou gramotnost, se snaží stanovit úroveň a části matematiky, které by měli patnáctiletí žáci ovládat, pokud se mají stát konstruktivními, angažovanými a přemýšlivými občany, konající rozhodnutí až po zvážení situace. Protože projekt PISA není konstruován na základě

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

matematického kurikula, snaží se reflektovat matematiku, kterou se žáci pravděpodobně mohli naučit před patnáctým rokem života.

Snahou autorů projektu je, aby jednak směřoval do budoucnosti, ale zároveň odrážel to, s čím se už patnáctiletí žáci mohli setkat. Autoři analyzovali matematické standardy v jedenácti zemích a na základě této analýzy se pokusili stanovit, jakou matematiku se žáci na celém světě učí a jakou matematiku považují v jednotlivých zemích za realistickou a důležitou pro přípravu žáků na prahu vstupu na trh práce nebo k přijetí na střední školu. Na základě společných rysů těchto analýz a na základě doporučení odborníků byl pro měření matematické gramotnosti patnáctiletých žáků v rámci projektu PISA stanoven níže popsaný obsah.

Základem pro stanovení obsahu projektu PISA se staly čtyři obsahové okruhy *změna a vztahy, prostor a tvar, kvantita, neurčitost a data*. Tematické celky ale nelze přiřadit výlučně k jednomu z okruhů. Například úměrnost hraje roli v tak rozličných kontextech, jako jsou převody jednotek, analýza lineárních závislostí, výpočet pravděpodobnosti, zkoumání délky stran podobných útvarů. Následující tematické celky ukazují, že mnohé pojmy náleží do všech čtyř okruhů, což je dokladem koherence matematiky jako oboru. Jedná se o ilustraci tematických celků obsažených v šetření PISA 2012, nejde tedy o vyčerpávající seznam:

- *Funkce:* Pojem funkce s důrazem na lineární funkce (nikoli výlučně), jejich vlastnosti a možnosti jejich popisu a reprezentace. Obvykle se funkce předkládají verbálně, symbolicky, pomocí tabulek nebo graficky.
- *Algebraické výrazy*: Slovní interpretace algebraických výrazů a jejich úpravy včetně numerických, symbolických a aritmetických operací, umocňování a odmocňování.
- *Rovnice a nerovnice*: Lineární a příbuzné rovnice a nerovnice, jednoduché kvadratické rovnice, analytické a neanalytické metody řešení.
- *Soustavy souřadnic*: Znázornění a popis dat, pozice a vztahů.
- *Vztahy uvnitř geometrických útvarů a těles a vztahy mezi nimi*: Statické závislosti jako algebraické vztahy mezi prvky útvarů (např. Pythagorova věta jako vyjádření vztahů mezi délkami stran v pravoúhlém trojúhelníku), vzájemná poloha, podobnost a shodnost i dynamické vztahy včetně transformací a posunutí či shodnost dvou a trojrozměrných objektů.
- *Měření*: Kvantifikace vlastností útvarů a těles i mezi nimi, například velikost úhlu, vzdálenost, délka, obvod, povrch, obsah a objem.
- *Čísla a jednotky*: Pojem a znázornění čísel, číselných oborů včetně vlastností celých a racionálních čísel, podstatných vlastností iracionálních čísel, veličiny a jednotky popisující čas, peníze, hmotnost, teplotu, vzdálenost, obsah a objem, odvozené veličiny a jejich číselný popis.
- *Aritmetické operace*: Charakter a vlastnosti těchto operací a související konvence zápisu.
- *Procenta, poměr a úměrnost*: Číselný popis relativní velikosti a využívání úměry při řešení úloh.
- *Principy kombinatorického počítání*: Jednoduché kombinace a permutace.
- *Odhad*: Účelové zaokrouhlování veličin a číselných výrazů, včetně zaokrouhlování s požadovanou přesností.
- *Sběr dat, jejich prezentace a interpretace*: Povaha, původ a sběr různých druhů dat a různé způsoby jejich prezentace a interpretace.
- *Variabilita dat a její popis*: Pojmy jako variabilita, rozložení a centrální tendence datových souborů a způsoby, jak je popsat a interpretovat z kvantitativního hlediska.
- *Vzorky a jejich výběr*: Pojmy výběr vzorku a vzorkování populace (základního souboru) včetně vyslovování jednoduchých závěrů na základě vlastností vzorků.
- *Pravděpodobnost*: Pojem náhodných jevů, náhodných variací a jejich znázornění, nahodilost a frekvence událostí, základní aspekty pojmu pravděpodobnost.

Kontexty

Podstatnou částí matematické gramotnosti je, že musíme umět řešit úlohy v kontextu reálného světa, z něhož vycházejí. Volba vhodných matematických strategií a reprezentací je často závislá právě na tomto kontextu. Obecně se uvádí, že schopnost pracovat v kontextu klade na řešitele další nároky (viz Watson a Callingham, 2003, věnovali se statistice). Projekt PISA se snaží vycházet z široké škály různých kontextů, což umožňuje propojit úlohy s nejrůznějšími zájmy jedince a se situacemi, v nichž se žáci ve 21. století nacházejí.

Pro účely koncepčního rámce PISA 2012 jsou definovány čtyři okruhy kontextů, z nichž vycházíme při klasifikaci úloh navržených pro projekt PISA:

- *Osobní*: Úlohy, které spadají do okruhu osobních kontextů, se zaměřují na situace související s jedincem, jeho rodinou a známými. Může sem patřit mimo jiné vaření, nakupování, hry, zdraví, osobní doprava, sporty, cestování, plánování a osobní finance. Zveřejněná úloha *PIZZY* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky") patří do osobního kontextu, protože je položena otázka, která pizza představuje pro kupujícího výhodnější koupi. Obdobně spadají do okruhu osobního kontextu dvě otázky z úlohy *CHŮZE* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky"). V jedné z nich je matematický vzorec použit pro výpočet délky kroku jedince, druhá vyžaduje použití stejného vzorce pro určení jeho tempa.
- *Profesní*: Úlohy, které se řadí do okruhu profesního kontextu, vycházejí ze světa práce. Otázky mohou zahrnovat měření, kalkulaci nákladů a objednávání materiálu na stavbu, mzdy/účetnictví, kontrolu kvality, plánování/inventarizaci, design/architekturu a rozhodování v souvislosti se zaměstnáním. Profesní kontext se může týkat jakéhokoli typu práce, od nekvalifikované práce po nejvyšší úrovně odborné práce. Podstatné však je, aby úlohy projektu PISA byly přiměřené patnáctiletým žákům. Uvolněná úloha *TESAŘ* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky") patří do okruhu profesního kontextu, protože se zabývá pracovním úkolem tesaře, který má vyrobit dřevěné ohraničení záhonu. Úloha, která by vyžadovala podobnou matematickou analýzu jako úloha *PIZZY*, ale byla by podána z pohledu prodávajícího místo kupujícího, by také patřila do tohoto okruhu.
- *Společenský*: Úlohy, které spadají do okruhu společenských kontextů, se zaměřují na komunitu a společnost (ať už místní, národní či nadnárodní). Mohou se týkat volebních systémů, veřejné dopravy, vlády, veřejné politiky, demografie, reklamy, národních statistik, ekonomických ukazatelů a hospodářství. Přestože ve všech těchto situacích jsou aktéry jedinci, v tomto okruhu kontextů se na úlohy díváme z perspektivy komunity či společnosti. Úloha *ROCKOVÝ KONCERT* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky") je příkladem položky, která spadá do tohoto okruhu, i když obsahuje zkušenosti jedince s davem, ale těžiště zájmu je na úrovni organizace koncertu, nikoli jedincovy zkušenosti.
- *Vědecký*: Úlohy zařazené do okruhu vědeckých kontextů se zaměřují na aplikaci matematiky v přírodě, ve světě vědy a technologií. Otázky mohou spadat mimo jiné do oblasti počasí a klimatu, ekologie, medicíny, vesmírného výzkumu, genetiky, měření a světa matematiky jako takové. Uvolněná úloha *ODPADKY* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky") je příkladem úlohy, která patří k vědeckému kontextu, protože vychází z otázek týkajících se životního prostředí, konkrétně dat o poločase rozkladu. Do vědeckého kontextu spadají i matematické položky, jejichž všechny prvky náleží přímo do světa matematiky.

Testové úlohy PISA obsahují úvodní text, který je společný pro všechny otázky dané úlohy, neboť obvykle všechny otázky v jedné testové úloze spadají do stejného okruhu kontextu. Existují však výjimky; například jeden úvodní text může být v různých otázkách zkoumán z osobního i společenského hlediska. Pokud jsou v určité otázce čistě matematické konstrukty, které neodkazují na kontext celé úlohy, řadíme tuto otázku do okruhu kontextu úlohy. Ve zcela výjimečném případě, kdy celá testová úloha obsahuje pouze matematické konstrukty bez jakéhokoli odkazu na kontext vně matematiky, ji řadíme do okruhu vědeckých kontextů.

Takto definované okruhy kontextu tvoří kvalitní základ pro výběr dostatečně různorodých položek, které zajišťují, že v testování bude zkoumána matematika v celé řadě různých použití, od běžných každodenních osobních situací po globální vědecké problémy. Je nesmírně důležité, aby se v každém okruhu kontextů nacházely různě obtížné úlohy. Okruhy kontextu byly definovány z toho důvodu, aby testování zkoumalo co nejširší spektrum situací, které odrážejí různé stránky matematické gramotnosti, proto musí být úlohy vybírány tak, aby bylo možné jejich prostřednictvím měřit matematickou gramotnost. Je třeba předejít situaci, kdy by obtížnost otázek z jednoho okruhu kontextů byla výrazně vyšší nebo nižší než obtížnost otázek z jiného okruhu.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost ČŠI Česká školní inspekce
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Při hledání relevantních kontextů nesmíme zapomínat, že cílem testování je měřit znalosti matematického obsahu, postupy a dovednosti, které žáci získali před patnáctým rokem života, je tedy třeba vybírat se zřetelem na zájmy a zkušenosti cílové skupiny a také s ohledem na požadavky, které na žáky budou kladeny, až budou jako tvůrčí, angažovaní a kritičtí občané vstupovat do společnosti. Toto hledisko je u testových úloh v rámci projektu PISA konzultováno s národními projektovými manažery ze zúčastněných zemí.

HODNOCENÍ MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI

V této části popisujeme přístup, jehož cílem je převést koncepční rámec šetření PISA 2012 uvedený v předchozích oddílech do praxe. Předkládáme strukturu matematické části projektu PISA, způsob popisu dosažené matematické úrovně, postoje, které se mají zkoumat a které mají souvislost s matematickou gramotností, a organizaci nepovinného testování matematiky na počítači.

Uspořádání matematické části šetření PISA 2012

V souladu s definicí matematické gramotnosti vycházejí testové úlohy, jež tvoří součást každého nástroje projektu PISA, ať už klasického nebo na počítači, z určitého kontextu. Úlohy vyžadují aplikaci důležitých matematických pojmů, znalostí, dovedností a porozumění (znalost matematického obsahu), které lze očekávat u patnáctiletých žáků (viz výše). Koncepční rámec slouží jako návod k uspořádání testu či průvodce obsahem testování. Je nezbytné, aby klasický test i test na počítači obsahoval vhodný poměr položek, který reflektuje různá hlediska koncepce matematické gramotnosti.

Žádoucí rozložení dosažených bodů z hlediska matematických postupů

Testové položky v matematické části šetření PISA 2012 mohou být přiřazeny do jedné ze tří kategorií matematických postupů. Snahou je sestavit test tak, aby byl poměr mezi testovými položkami, které vycházejí z postupů, při nichž dáváme reálný svět do souvislosti se světem matematiky, a mezi položkami s postupy, při nichž žáci řeší matematicky formulovaný problém, vyvážený.

Tabulka 1.1

Přibližné rozložení bodů v matematice podle kategorie postupu

Kategorie postupu	Podíl bodů v procentech
Formulování situace matematicky	přibližně 25
Používání matematických pojmů, faktů, postupů a odůvodňování	přibližně 50
Interpretování, aplikace a hodnocení matematických výsledků	přibližně 25
CELKEM	100

Je důležité, aby měly jednotlivé položky z každé kategorie různou obtížnost.

Žádoucí rozložení dosažených bodů podle obsahového okruhu

Matematické položky PISA jsou voleny tak, aby reflektovaly výše popsané znalosti matematického obsahu. Testové položky v matematické části šetření PISA 2012 lze přiřadit k jednomu ze čtyř obsahových okruhů. Klíč je uveden v tabulce 1.2. Snahou je sestavit test tak, aby rozložení testových položek z hlediska obsahu bylo pokud možno vyvážené, protože všechny obsahové okruhy jsou pro angažované, konstruktivní a kritické občanství stejně důležité.

Tabulka 1.2

Přibližné rozložení bodů v matematice podle obsahového okruhu

Obsahový okruh	Podíl bodů v procentech
Změna a vztahy	přibližně 25
Prostor a tvar	přibližně 25
Kvantita	přibližně 25
Neurčitost a data	přibližně 25
CELKEM	100

Je důležité, aby měly jednotlivé položky z každého obsahového okruhu různou obtížnost.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Žádoucí rozložení dosažených bodů podle kontextu

Testové položky v matematické části šetření PISA 2012 jsou přiřazeny do jednoho ze čtyř okruhů kontextu. Položky vybrané pro šetření PISA 2012 pokrývají všechny tyto okruhy. Jejich rozložení je popsáno v tabulce 1.3 a má zajistit, aby nepřevažoval ani jeden z kontextů. Položky pokrývají široké rozpětí zájmových oblastí i situací, s nimiž se žáci mohou v životě setkat.

Tabulka 1.3

Přibližné rozložení bodů v matematice podle kontextu

Kontext	Podíl bodů v procentech
Osobní	přibližně 25
Profesní	přibližně 25
Společenský	přibližně 25
Vědecký	přibližně 25
CELKEM	100

Je důležité, aby měly jednotlivé položky z každého kontextu různou obtížnost.

Rozložení obtížnosti položek

Šetření PISA 2012 v matematice obsahuje položky různé obtížnosti, které mají kopírovat rozpětí schopností patnáctiletých žáků. V projektu se nachází jak položky, jejichž řešení je náročné i pro nadprůměrné žáky, tak položky pro výrazně podprůměrné žáky. Z psychometrického hlediska je šetření, které je vytvořené pro účely měření konkrétní kohorty respondentů, nejefektivnější a nejúčinnější, pokud obtížnost testových položek odpovídá schopnostem měřených subjektů. Navíc úrovňová škála navržená pro hodnocení výsledků projektu PISA může podávat užitečné informace o všech žácích pouze tehdy, pokud deskriptory jednotlivých úrovní popisují všechny zkoumané dovednosti. Jednotlivé úrovně jsou pak navrženy tak, aby odpovídaly nárůstu v aktivaci základních matematických dovedností, což detailně popisujeme ve shrnutí v rámečku 1.1 „Základní matematické dovednosti a jejich vztah k obtížnosti položky". Předchozí cykly PISA ukázaly, že právě tyto dovednosti jsou indikátory kognitivní obtížnosti, takže jsou určující pro celkovou obtížnost testové položky (Turner, 2012; Turner a kol., v tisku). Škála používaná v šetření PISA 2012 je výsledkem testování v pilotáži a je založena na popisu dovedností, které je třeba při řešení aktivovat. Škála udává empirickou jednotku kognitivní náročnosti každé položky.

Struktura testového nástroje

Klasický „papírový" testový nástroj šetření PISA 2012 obsahuje celkem 270 minut matematického materiálu. Materiál je uspořádán do devíti bloků, z nichž každý představuje 30 minut testovacího času. Tři z těchto bloků (celkem 90 minut testovacího času) pocházejí z předchozích šetření PISA, čtyři „standardní" bloky (tedy 120 minut testovacího času) obsahují nový, různě obtížný materiál a dva „snadné" bloky (tedy 60 minut testovacího času) obsahují materiály nižší obtížnosti.

Každá země zadává z těchto devíti bloků sedm z nich: tři z předchozího testování, dva „standardní" a dva „snadné" bloky, nebo čtyři „standardní" bloky. Výběr mezi „snadnými" a „standardními" bloky položek dává jednotlivým zemím možnost, aby si testování přizpůsobily svým potřebám; položky jsou ale hodnoceny tak, aby celkové skóre země nebylo ovlivněno volbou „lehkých" či „standardních" bloků. Připravuje se několik verzí testových sešitů, v nichž se bloky střídají, přičemž každý testový sešit obsahuje čtyři bloky položek z matematiky, čtení a přírodních věd. Každý žák vyplňuje v časovém limitu 120 minut jeden sešit.

Nepovinné testování na počítači (CBAM) obsahuje celkem 80 minut matematického materiálu uspořádaného do čtyř bloků položek po 20 minutách testovacího času. Materiál je utříděn společně s dalším materiálem do několika verzí testů, přičemž každý test obsahuje dva bloky položek. Každý žák vyplňuje jeden test v časovém limitu 40 minut.

Design matematických položek šetření PISA 2012

V klasické „papírové" části šetření PISA 2012 se používají tři formáty testových položek: otevřené s tvorbou odpovědi, uzavřené s tvorbou odpovědi a s výběrem odpovědi. Otevřené položky s tvorbou odpovědi vyžadují delší písemnou odpověď a mohou také požadovat, aby žák ukázal kroky vedoucí k řešení, nebo vysvětlil, jak došel k určité odpovědi. Při vyhodnocování těchto položek je nezbytná práce vyškolených odborníků, kteří manuálně kódují odpovědi.

Uzavřené položky s tvorbou odpovědi nabízejí pro záznam řešení úlohy strukturovanější rámec a u odpovědi lze snadno určit, zda je správná, nebo nesprávná. Žákovské odpovědi na tento typ položek může obvykle vyhodnocovat počítač a mohou být kódovány automaticky, v některých případech je však nezbytné kódování školenými odborníky. Nejběžnější formou uzavřené odpovědi je číslo. U položek s výběrem odpovědí žák vybírá z několika možností jednu nebo více správných odpovědí, které lze vyhodnocovat automaticky. Testové nástroje jsou navrhovány tak, aby v nich byly rovnoměrně zastoupeny všechny tři formáty položek.

Nepovinné testování na počítači nabízí další formáty položek, protože počítačové prostředí nejen umožňuje širší škálu způsobů odpovědí, ale zároveň zjednodušuje hodnocení některých stránek matematické gramotnosti, jako například manipulaci a otáčení s trojrozměrnými tělesy, což v klasické „papírové“ formě testu hodnotit nelze. Testování na počítači může obohatit i prezentační stránku položky, do níž lze zahrnout pohyb i rotaci trojrozměrného tělesa. Počítač také umožňuje flexibilnější přístup k relevantním informacím i datům a nabízí širší škálu způsobů odpovědí, například možnost přetahovat objekty myší, využít aktivní body na obrázku. Žáci mohou častěji použít neverbální odpovědi, díky čemuž získáváme ucelenější obraz matematické gramotnosti, který je méně závislý na jazykových schopnostech žáka. Počítač také nabízí interaktivitu, navíc umožňuje automatické kódování odpovědí namísto manuálního, a to i v případě prvků v žákovských náčrtech, jejichž kódování bylo doposud realizovatelné dosti složitě (Stacey a Wiliam, v tisku).

Matematickou část projektu PISA tvoří *úlohy*, které obvykle obsahují slovní úvodní materiál doplněný v tabulkách, diagramech a grafech dalšími údaji. Každá úloha obsahuje několik otázek. Takovýto formát, kdy žáci řeší sérii souvisejících otázek, jim dává příležitost hlouběji se ponořit do kontextu nebo problémové situace, ale model měření, který se používá pro analýzu projektu PISA, předpokládá nezávislost jednotlivých testových otázek. Proto ve všech úlohách, kde je více než jedna otázka, se autoři snaží o maximální nezávislost jednotlivých otázek. Uspořádání otázek do úloh má v projektu PISA sloužit k tomu, aby úlohy vycházely z nejreálnějších kontextů, odrážely komplexnost reálných situací a zároveň aby byl optimálně využíván testovací čas. Je také třeba věnovat pozornost tomu, aby byl okruh kontextů dostatečně široký, neboť tak lze předcházet zkreslení výsledků v důsledku malé různorodosti kontextu a velké provázanosti testových otázek. Při tvorbě testových nástrojů se právě těmto dvěma hlediskům věnuje maximální pozornost.

Obtížnost otázek vybíraných pro testy v projektu PISA je velmi různorodá, což má zajistit, aby otázky odrážely odlišné schopnosti testovaných žáků. Pozornost je věnována i tomu, aby byly do testů zařazovány otázky ze všech hlavních kategorií a okruhů (obsah, postupy a kontext), přičemž je vždy dbáno na rozdílnost jejich obtížnosti. Obtížnost otázek je jedním z mnoha parametrů testovaným ještě před začleněním otázky do projektu PISA. Do hlavního šetření PISA jsou pak zařazovány takové položky, které vyhovují rámcovým okruhům i kategoriím a jsou měřitelné.

Při tvorbě a výběru otázek je navíc pečlivě zvažována jejich obtížnost z hlediska čtenářské gramotnosti. Cílem je formulovat zadání co nejpříměji a nejsrozumitelněji. Pozornost je věnována také možným kulturním předsudkům a překážkám, z tohoto důvodu jsou všechny vybrané položky konzultovány s národními týmy a poté jsou otázky velmi pečlivě překládány do národních jazyků. Pozornost věnovaná výběru otázek pro šetření PISA 2012 je o to větší, že toto šetření poprvé zahrnuje nepovinné testování na počítači, což může být další komplikací pro žáky, kteří nejsou zvyklí počítač používat v běžných hodinách matematiky.

Matematické nástroje

Testy projektu PISA žákům dovolují, aby při vyplňování „papírového“ testu používali kalkulačky. Toto rozhodnutí je reakcí na situaci, kdy už je používání kalkulaček při hodinách matematiky běžnou praxí. Jedná se o nejautentičtější hodnocení možných žákovských výkonů. Tato forma testování umožňuje provést dobré srovnání výkonnosti vzdělávacích systémů. Rozhodnutí, zda žáci mohou používat kalkulačky, se v zásadě neliší od jiných rozhodnutí ve vzdělávací politice, které jsou mimo pravomoc projektu PISA. V šetření PISA 2012 jsou poprvé v historii obsaženy otázky, jejichž řešení je výrazně jednodušší a rychlejší, pokud žáci mají přístup ke kalkulačkám, v případě některých testových otázek mají žáci, kteří mohou používat kalkulačky, výhodu. Klasický „papírový“ formát testu šetření PISA 2012 ale nepracuje s ničím složitějším, než se základními aritmetickými funkcemi běžné kalkulačky.

Nepovinné testování na počítači v šetření PISA 2012 žákům poskytuje přístup k online kalkulačce nebo softwaru, jehož funkce odpovídají požadavkům dané testové úlohy. Žáci mají dále povoleno, pokud jim to nezakazuje jejich

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

země, používat klasickou kalkulačku. Součástí zadání mohou být i další nástroje, například virtuální nástroje pro měření, základní funkce tabulkového procesoru nebo různé nástroje pro vizualizaci a grafické znázornění.

Vyhodnocování otázek

Za většinu testových otázek žáci získají buď plný počet bodů, nebo žádné body, u některých otevřených otázek s tvorbou odpovědi mohou získat podle „míry“ správnosti odpovědi část celkového bodového hodnocení. Na vyhodnocování takových otázek existuje detailní návod, který definuje, kdy má být žáku udělen plný počet bodů, kdy částečný počet bodů a kdy nemají být uděleny žádné body. Tento návod má zajistit, aby byl systém bodování ve všech zúčastněných zemích stejný, konzistentní a spolehlivý.

Jak projekt PISA referuje o úrovni způsobilosti v matematice

Zprávy podávané o výsledcích šetření PISA 2012 v matematice mají různé formy. Za prvé šetření odhaduje celkovou úroveň v matematice u každé zúčastněné země z vybraného vzorku žáků, dále definuje několik úrovní způsobilosti. Projekt popisuje úroveň matematické gramotnosti, která je charakteristická pro žáky v jednotlivých úrovních, dále podává informace o těch aspektech obecné úrovně matematické gramotnosti, jež mohou být důležité pro vzdělávací politiku v jednotlivých zemích, a formuluje z tohoto hlediska odhady úrovně žáků. Každá úroveň gramotnosti je podrobně popsána. Pro hodnocení výsledků existuje mnoho různých způsobů, jakými lze definovat škálu. Šetření PISA 2003 používalo škálu, která vycházela ze čtyř širokých obsahových okruhů. V obrázku 1.3 jsou popisy šesti úrovní matematické gramotnosti, jak byly použity v šetřeních PISA 2003, 2006 a 2009. Ty se staly základem škály úrovní v šetření PISA 2012.

Obrázek 1.3

Popis úrovní způsobilosti v matematice (2003-2009)

Úroveň	
6	Na úrovni 6 jsou žáci schopni konceptualizovat, zobecnit a použít informace, které získali vlastním zkoumáním a modelováním komplexní problémové situace. Jsou schopni propojit různé zdroje informací i různé reprezentace a jsou schopni flexibilně překládat z jedné formy reprezentace do druhé. Žáci ovládají pokročilé matematické myšlení a uvažování. Žáci jsou schopni využít vhled a porozumění, ovládají symbolické i formální matematické operace a vztahy. To vše využívají k vytváření nových přístupů a strategií pro řešení nových situací. Žáci jsou na této úrovni schopni formulovat, jak postupují. Umějí reflektovat svá zjištění, výsledky, interpretace, argumenty a posoudit vhodnost těchto výsledků z hlediska původní situace.
5	Na úrovni 5 žáci umějí vytvářet modely komplexních situací a s těmito modely dále pracovat, určit omezující podmínky a formulovat předpoklady. Umějí vybírat, porovnávat a vyhodnotit strategie řešení vhodné pro práci s komplexními úlohami, které z modelů vyplývají. Na této úrovni žáci umějí postupovat strategicky, využívat bohaté a rozvinuté myšlení a uvažování, vhodné navzájem propojené reprezentace a symbolické i formální charakteristiky situací a vhled do nich. Umějí reflektovat své jednání a formulovat i sdělovat své interpretace a závěry.
4	Na úrovni 4 žáci umějí efektivně pracovat s explicitními modely komplexních konkrétních situací, které mohou obsahovat omezující podmínky nebo vyžadovat vyslovení předpokladů. Umějí zvolit a integrovat různé reprezentace včetně symbolických a umějí je přiřadit k prvkům situací z reálného světa. Žáci na této úrovni využívají rozvinuté dovednosti a umějí v kontextech z reálného světa flexibilně uvažovat, někdy dokonce proniknou hluboko do situace. Umějí zformulovat a sdělovat vysvětlení i argumenty. Vycházejí při tom z vlastních interpretací, argumentace a činnosti.
3	Na úrovni 3 žáci umějí realizovat jasně definované postupy, a to včetně těch, které vyžadují sekvenční rozhodování. Umějí zvolit a aplikovat jednoduché řešitelské strategie. Žáci na této úrovni umějí interpretovat a využívat data pocházející z různých zdrojů informací a vyvozovat z nich závěry. Umějí krátce sdělit své interpretace, výsledky a dedukce.
2	Na úrovni 2 žáci umějí interpretovat a poznat situace v kontextech, které nevyžadují víc než přímé úsudky. Umějí vybrat podstatné informace z jednoho zdroje a využívají jednu formu reprezentace. Žáci na této úrovni umějí používat základní algoritmy, vzorce, postupy a konvence. Jsou schopni přímé dedukce a umějí doslovně interpretovat výsledky.
1	Na úrovni 1 žáci umějí odpovědět na otázky ze známého kontextu, pokud otázky obsahují všechny relevantní údaje a jsou jednoznačně definovány. Jsou schopni najít informace a provést rutinní postupy podle přesných instrukcí v explicitních situacích. Umějí realizovat činnosti, které jsou nasnadě a přímo plynou ze zadání.

Kromě této obecné škály matematické gramotnosti byly po pilotáži vytvořeny ještě tři škály pro popis matematické gramotnosti, které vycházejí z matematických postupů popsaných výše – *formulování situací matematicky; používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování; interpretování, aplikace a hodnocení matematických výsledků*.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Základní matematické dovednosti hrají klíčovou roli při definici toho, co přesně z hlediska matematické gramotnosti znamená být na jedné z úrovní a co přesně to znamená z hlediska výše uvedených postupů – jednotlivé úrovně popisují růst zdatnosti ve všech aspektech matematické gramotnosti. Například popis úrovně 4 (viz obrázek 1.3) ve druhé větě zdůrazňuje matematizaci a reprezentaci, které jsou v této úrovni evidentní. Poslední věta zase definuje pro úroveň 4 jako charakteristickou komunikaci, uvažování a argumentaci, které jsou v kontrastu s krátkým sdělováním a nedostatkem argumentů charakteristickými pro úroveň 3, i v kontrastu s úrovní 5, kdy už žáci umějí tuto komunikaci reflektovat. Rámeček 1.1 „Základní matematické dovednosti a jejich vztah k obtížnosti položky" ve shrnutí popisuje základní matematické dovednosti ve vztahu k jejich vývoji na jednotlivých úrovních matematické způsobilosti. V dřívější části tohoto koncepčního rámce a v obrázku 1.2 byl každý matematický postup popsán prostřednictvím základních matematických dovedností, které jednotlivci aktivují, pokud tento postup používají.

S ohledem na návaznost k výsledkům šetření PISA 2003, v němž byla matematika naposledy hlavní oblastí testování, a na skutečnost, že tyto informace jsou užitečné pro určování vzdělávací politiky, je součástí popisu úrovně také škála, která vychází ze čtyř obsahových okruhů: *kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost a data* a měla by poskytnout údaje o profilu matematické gramotnosti v souvislosti s tím, na co jednotlivá národní kurikula kladou důraz.

Postoje k matematice

Postoje, názory a pocity hrají nejen velkou roli v tom, zda nás matematika zajímá a jak na ni reagujeme, ale také ovlivňují, jak často matematiku používáme v běžném životě. Žáci, kteří jsou v matematice sebevědomější, budou matematiku používat s vyšší mírou pravděpodobnosti v nejrůznějších kontextech, s nimiž se setkají, podobně žáci, kteří mají k matematice pozitivní vztah, se budou matematiku učit lépe než ti, kteří cítí úzkost. Proto je jedním z cílů matematického vzdělávání rozvíjet takové postoje, názory a pocity, díky nimž budou žáci úspěšně používat matematiku, kterou znají, a budou se učit jak pro vlastní prospěch, tak pro prospěch celé společnosti další matematiku.

Pozornost, kterou šetření PISA 2012 věnuje těmto proměnným, vychází z přesvědčení, že rozvoj kladného vztahu k matematice je sám o sobě cenným výsledkem vzdělávání dávající žákům předpoklad pro to, aby matematiku používali v běžném životě. Protože tyto proměnné mohou pomoci vysvětlit, proč jsou v matematické gramotnosti takové rozdíly, nachází se v projektu PISA položky, které se k nim vztahují. PISA měří celou řadu dalších proměnných s cílem umožnit podání zpráv o různých podskupinách žáků (např. podle pohlaví, jazyka nebo statutu přistěhovalce).

Základní informace o žácích jsou získávány od nich samých a ředitelů škol, a to z dotazníků, jejichž vyplnění trvá asi dvacet až třicet minut. Údaje z těchto dotazníků jsou klíčové, aby bylo možné výsledky šetření interpretovat z hlediska určité skupiny žáků nebo charakteristiky školy.

Matematická část projektu PISA označuje za potenciálně zajímavé dvě bohaté oblasti žákovských postojů k matematice, jež je předurčují k produktivnímu zapojení se do matematiky, a to zájem žáků o matematiku a jejich ochota se matematice věnovat.

Komponenty zájmu o matematiku mají vztah k přítomné i budoucí činnosti. Co je třeba zkoumat, je zájem žáků o matematiku ve škole, zda ji vnímají jako užitečnou pro každodenní život a zda plánují matematiku dále studovat a věnovat se jí v profesní dráze. Toto téma je aktuální napříč zeměmi, neboť v celé řadě z nich poslední dobou klesá podíl žáků, kteří si matematiku a jí příbuzné obory volí jako obor dalšího studia, přičemž ale roste potřeba po absolventech škol s tímto zaměřením.

Ochota žáků věnovat se matematice souvisí s postoji, pocity a sebehodnocením, které dohromady předurčují, zda žák bude nebo nebude umět těžit z úrovně matematické gramotnosti, jíž dosáhl. Žáci, které matematické činnosti baví a cítí se při nich dobře, budou s vyšší mírou pravděpodobnosti používat matematiku, když přemýšlejí o situacích v nejrůznějších okamžicích každodenního života, jak ve škole, tak mimo ni. Konstrukty z projektu PISA, které mají vztah k této problematice, jsou pocity štěstí, sebevědomí, (chybějící) úzkost, sebepojetí a seberealizace. Nedávná analýza dalšího vývoje mladých Australanů, jejichž skóre v projektu PISA bylo v patnácti letech podprůměrné, ukázala, že ti, kteří si „uvědomili význam matematiky pro úspěch v budoucnosti, budou pravděpodobně úspěšní a

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Česká školní inspekce

budou spokojeni jak v osobním, tak profesním životě" (Thomson a Hillman, 2010, str. 31). Autoři této studie uvádějí, že postoje a názory podprůměrných žáků se mohou zlepšit, pokud se výuka matematiky zaměří na praktické aplikace matematiky v každodenním životě.

Dotazník pro žáky také obsahuje položky, které se zabývají *příležitostí se učit*, týkající se zkušeností žáků s nejrůznějšími typy aplikovaných matematických úloh, jejich povědomí o matematické terminologii (v těchto položkách jsou opatření, která mají zabránit tomu, aby se žáci nadhodnocovali) a rovněž zkušeností žáků z testů a výuky s položkami podobnými testovým položkám projektu PISA. To vše má umožnit hlubší analýzu výsledků PISA.

Výsledky šetření PISA 2012 jsou zdrojem důležitých údajů pro ty, kdo určují vzdělávací politiku v zúčastněných zemích, a to jak z hlediska výkonu, tak z hlediska postojů. Kombinace údajů z hodnocení matematické gramotnosti PISA a údaje z šetření postojů, názorů a pocitů, které předurčují žáky k využívání matematické gramotnosti, poskytují ucelený obraz.

Nepovinné testování matematiky na počítači

Šetření PISA 2012 rovněž obsahuje testování matematiky na počítači.[4] Toto testování je pro zúčastněné země nepovinné (s ohledem na různou technologickou vybavenost v jednotlivých zemích) a bylo přidáno ze dvou základních důvodů. Za prvé dnes počítače zcela běžně používáme jak v práci, tak v běžném životě. Z toho plyne, že nelze hodnotit úroveň matematické gramotnosti ve 21. století, aniž bychom zároveň hodnotili uživatelské dovednosti při práci s počítačem (Hoyles a kol., 2002). Lidé na celém světě se dennodenně setkávají s počítačem v osobním, společenském, profesním i vědeckém kontextu, počítače poskytují nástroje pro – mimo jiné – výpočty, reprezentace, vizualizaci, úpravy, zkoumání a experimentování, to vše s mnoha různými matematickými objekty, jevy a procesy. Definice matematické gramotnosti, jak je uvedena v koncepčním rámci PISA 2012, uznává význam výpočetních nástrojů, uvádí, že matematicky gramotní jedinci musí být schopni výpočetní nástroje využívat při popisování, vysvětlování nebo predikování různých jevů. Slovo „nástroj" v definici označuje kalkulačky, počítače i jiné fyzické předměty používané při měřeních a konstrukcích, např. pravítka a úhloměry. Za druhé počítač nabízí pro autory testů celou řadu možností, jak vytvářet interaktivnější, autentičtější a zajímavější testové položky (Stacey a Wiliam, v tisku), což třeba znamená tvořit nové formáty položek (např. využít přetahování myší), předložit žákům data z reálného světa (například velké datové sady, které lze různě třídit), používat barvy a grafiku pro zatraktivnění vizuální stránky testových položek.

Nepovinné testování matematiky na počítači zařazené do šetření PISA 2012 je nejzásadnější inovací tohoto projektu. Speciálně vytvořené testové položky jsou žákům předkládány přímo na počítači, žáci na něm rovnou odpovídají, ale v průběhu řešení mají k dispozici i tužku a papír. Až s testováním na počítači získají autoři testových položek více zkušeností, bude možná projekt PISA obsahovat více sofistikované testové položky. Šetření PISA 2012 je pouhým začátkem, který jen naznačuje potenciál této formy testování.

Tam, kde autoři položek využívají možností výpočetních technologií, jsou testové položky zajímavější, barevnější a snáze pochopitelné, protože žáci mají snadný přístup k podstatným informacím. V zadání může být například pohyb, reprezentace trojrozměrných těles, které lze otáčet. Nový formát položek, jež využívají přetahování myší nebo aktivní body v zadání, nabízejí širší škálu typů odpovědí a podávají ucelenější obrázek o matematické gramotnosti.

Výzkumy ukazují, že tam, kde jsou dostupné elektronické technologie, rostou matematické nároky na práci. To znamená, že matematickou gramotnost nelze oddělit od schopnosti pracovat s počítačem (Hoyles a kol., 2002). Pro všechny zaměstnance dnes platí, že matematická gramotnost a práce s informačními a výpočetními technologiemi jdou ruku v ruce, proto má právě testování na počítači v projektu PISA poskytnout do této problematiky vhled. Největší výzvou je odlišit, co v testové položce souvisí s matematickou gramotností a zdatností a co souvisí s jinými oblastmi, například s novými nároky, které na testové položky kladou informační a výpočetní technologie i nové formáty položek. V nepovinném testování matematiky na počítači v šetření PISA 2012 se klade důraz na to, aby nároky na používání určitého nástroje v rámci testové položky byly výrazně nižší než její matematická náročnost. Existují výzkumy vlivu testování na počítači na výsledky žáků v testu (Bennett, 2003; Bennett a kol., 2008; Mason a kol., 2001; Richardson a kol., 2002; Sandene a kol., 2008) a šetření PISA 2012 nabízí možnost tyto poznatky prohloubit, aby od roku 2015 dále sloužily jako výchozí bod pro tvorbu testů pro testování na počítači. Některé testové položky nejsou záměrně v nových formátech, což má umožnit sledovat (kladný i záporný) vliv nových formátů na výsledky žáků.

Aby bylo možné kontrolovat celou řadu jevů, které přináší testování na počítači, jsou u každé testové položky popsána tři následující hlediska:

Testované matematické kompetence: Sem patří stránky matematické gramotnosti, které lze aplikovat ve všech prostředích, nejen v prostředí počítačů, a které se testují v každé položce počítačového testu.

Kompetence, které kombinují matematiku i informační technologie: Tyto kompetence vyžadují znalost toho, jak se matematika provádí s použitím počítače nebo jiných manuálních pomůcek. Tyto kompetence se testují ve vybraných – nikoli všech – položkách testu. Test na počítači může hodnotit následující kompetence:

- vytváření diagramů a grafů z dat, včetně dat v tabulkách hodnot (např. kruhový diagram, sloupcový diagram, spojnicový diagram) s použitím jednoduchého „průvodce“;
- vytváření grafů funkcí a využití těchto grafů při hledání odpovědí na otázky o funkcích;
- třídění informací a plánování vhodných strategií pro jejich třídění;
- používání klasických kalkulaček nebo kalkulaček na monitoru;
- používání virtuálních nástrojů jako pravítko nebo úhloměr na monitoru;
- úpravy obrazců s pomocí dialogového okna nebo myši otočením, posunutím a v osové souměrnosti.

Informační a výpočetní dovednosti: Klasické „papírové“ testy spoléhají při práci s tištěným materiálem na základní dovednosti. Obdobně je testování na počítači postaveno na základních dovednostech při práci na počítači. Patří sem znalosti hardwaru (např. klávesnice a myš) a základních konvencí (např. šipky pro posun vpřed, speciální tlačítka pro příkaz). Snahou v každé položce testování na počítači je vyžadovat minimální úroveň těchto dovedností.

SHRNUTÍ

Cílem projektu PISA z hlediska matematické gramotnosti je vyvinout ukazatele, které nám ukážou, jak efektivně jednotlivé země připravují své žáky na to, aby používali matematiku ve všech oblastech osobního, společenského i profesního života a stávali se tak konstruktivními, angažovanými a kritickými občany. PISA nabízí vlastní definici matematické gramotnosti a pro její hodnocení vlastní rámec, který reflektuje podstatné složky definice. Z této definice a z tohoto rámce vycházejí v matematické části projektu pro šetření PISA 2012 navržené položky, u nichž mají být v rovnováze matematické postupy, obsah a kontexty. Cílem je prostřednictvím použitých položek určit, co z toho, co se žáci naučili, umějí používat. Položky od žáků vyžadují, aby při řešení úloh používali obsahy, které znají, aby aplikovali dovednosti, které ovládají, a přitom vycházeli ze zkušeností z běžného života. Test obsahuje položky v různých formátech, které se liší mírou poskytnuté nápovědy i mírou strukturovanosti, důraz je kladen na výběr autentických úloh, v nichž musí žáci samostatně přemýšlet.

Rámeček 1.1 **Základní matematické dovednosti a jejich vztah k obtížnosti položky**

Základní matematické dovednosti, které jsou nutné pro vyřešení úlohy, mohou být dobrým průvodcem empirickou obtížností položek (Turner, 2012; Turner a Adams, 2012; Turner a kol., v tisku). Nejjednodušší položky vyžadují aktivaci jen malého počtu dovedností, a to poměrně přímým způsobem, nejtěžší položky naopak vyžadují aktivaci několika dovedností zároveň. Chceme-li stanovit obtížnost položky, musíme uvážit nejen počet potřebných dovedností, ale i komplexnost jejich aktivace. Následující přehled popisuje charakteristiky, které určují, zda je aktivace jedné dovednosti přímá nebo komplexní (viz také Turner, 2012).

Komunikace: Úroveň komunikační obtížnosti úlohy určuje mnoho faktorů. Míru komunikačních dovedností lze sledovat tam, kde se jedinec vypořádává s komunikačními nároky úlohy. Receptivní stránka komunikace se týká například délky a komplexnosti textu, který je třeba přečíst a interpretovat, všeobecných znalostí o pojmech a údajích, o nichž se v textu hovoří, míry, v jaké je třeba relevantní informace oddělit od informací nerelevantních, uspořádání informací, odpovídající pořadí myšlenkových procesů, které jsou nezbytné pro interpretaci a využití těchto informací, a míry, do jaké spolu navzájem souvisejí různé prvky (například texty, grafické prvky, grafy, tabulky, diagramy). Co se týká produktivních dovedností, nejjednodušší jsou ty úlohy, kde žáci odpovídají číslem, jakmile je k odpovědi potřeba další vyjadřování, například když žák musí podat ústní či písemné vysvětlení nebo odůvodnění výsledku, komunikační náročnost úlohy roste.

Matematizace: V některých úlohách není matematizace nutná, neboť má zadaná úloha buď již dostatečně matematizovanou podobu, nebo k jejímu řešení není třeba situaci modelovat. Nároky na matematizaci rostou,

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

pokud řešitel musí interpretovat a dedukovat. Nejsnazší formou jsou interpretace a dedukce přímo z daného modelu nebo přímý překlad situace do matematiky (např. strukturování a konceptualizace situace, identifikace a výběr klíčové proměnné, získání potřebných měr, nebo vyhotovení schémat a náčrtů). Nároky na matematizaci rostou, pokud řešitel musí daný model upravit tak, aby vyhovoval změněným podmínkám, nebo pokud je třeba interpretovat odvozené vztahy; vybrat známý model v rámci omezujících, dobře formulovaných podmínek; nebo vytvořit model, kde jsou požadované proměnné, vztahy a omezující podmínky explicitní a jasné. Z hlediska matematizace je ještě náročnější, když řešitel vytváří nebo interpretuje model v situaci, kdy je třeba vyslovit a definovat mnoho hypotéz, proměnných, vztahů a omezujících podmínek, nebo když je třeba ověřit, zda model vyhovuje podmínkám zadání, nebo je-li třeba vyhodnotit a porovnat modely.

Reprezentace: Na nejnižší úrovni je tato matematická dovednost potřeba, pokud chceme přímo uchopit danou, běžnou reprezentaci, například převést text na čísla, vyčíst hodnoty z grafu nebo tabulky. Kognitivně náročnější úlohy zahrnující reprezentace vyžadují výběr a interpretaci jedné standardní nebo známé reprezentace v kontextu situace. Na ještě vyšší úrovni je třeba překládat mezi dvěma nebo více různými reprezentacemi v kontextu situace, včetně modifikace reprezentace. Patří sem také vytváření přímočaré reprezentace situace. Na ještě vyšší úrovni je již třeba rozumět nestandardním reprezentacím a používat je, vytvořit reprezentace, které zachycují klíčové aspekty komplexní situace; či reprezentace, které vyžadují značnou míru dekódování a interpretace; nebo porovnat a zhodnotit různé reprezentace.

Uvažování a argumentace: V úlohách, ve kterých stačí tuto dovednost aktivovat na nízké úrovni, může mít uvažování podobu prosté práce podle zadání. Na poněkud vyšší úrovni obtížnosti je již třeba jistá míra reflexe, aby se díky spojení různých informací daly formulovat úsudky (např. spojit různé údaje ze zadání nebo v rámci určité dílčí úlohy použít přímého logického uvažování). Vyšší úroveň pak již vyžaduje analýzu informací, která umožní komplexní argumentaci či propojení několika proměnných; nebo logické usuzování vycházející ze souvisejících zdrojů informací. Ještě vyšší úroveň obtížnosti si žádá syntézu a kritické zhodnocení informací, nebo použití logických řetězců pro odůvodnění úsudků, eventuálně cílené a systematické zobecňování vycházející z kombinace více informací.

Navržení strategií řešení: V úlohách, kde je tato dovednost na relativně nízké úrovni, obvykle stačí postupovat přímo, neboť řešitelská strategie je zjevná nebo popsaná v zadání. Na poněkud vyšší úrovni obtížnosti může být nutné rozhodnout, která strategie je vhodná a která bude umět využít podstatné informace ze zadání. Kognitivní nároky rostou, pokud je třeba odvodit a konstruovat strategii, díky níž jsou údaje při řešení transformovány. Ještě obtížnější úlohy vyžadují, aby žák navrhl propracovanou strategii, bez které není možné úlohu vyřešit; nebo aby porovnal a zhodnotil různé možné strategie.

Používání symbolického, formálního a technického jazyka a operací: Obtížnost aktivace této dovednosti se v jednotlivých testových položkách velmi liší. U nejjednodušších úloh není třeba aktivovat jiná matematická pravidla a symbolické výrazy než základní aritmetické operace s malými či snadno uchopitelnými čísly. Práce na vyšší úrovni obtížnosti může zahrnovat sekvenční aritmetické operace nebo přímé použití funkcí, ať už implicitně nebo explicitně (např. běžné lineární závislosti); používání formálních matematických znaků a symbolů (např. dosazování, početní operace s desetinnými čísly a zlomky); nebo vybavení si a použití formální matematické definice, konvence nebo pojmu. Další nárůst kognitivní obtížnosti s sebou nese potřebu explicitně používat a upravovat znaky a symboly (např. algebraické úpravy vzorce), nebo si vybavit a používat matematická pravidla, definice, konvence, postupy a vzorce za pomoci kombinace různých vztahů a symbolických pojmů. Pro ještě vyšší úroveň obtížnosti je charakteristická potřeba použít komplexní formální matematické postupy, flexibilní práce s funkcemi a algebraickými vztahy, nebo používání jak matematických metod, tak poznatků pro nalezení řešení.

Používání matematických nástrojů: Úlohy a úkoly, ve kterých je tato dovednost potřeba na relativně nízké úrovni, mohou vyžadovat přímé použití běžných nástrojů (např. měřidel) v situacích, v nichž jsou vhodné. Vyšší úroveň pak vyžaduje použití nástroje v několika po sobě jdoucích krocích nebo použití nástroje k tomu, abychom dali do souvislosti různé údaje. Vyšší úroveň obtížnosti je typická také pro úlohy, kdy je použitý nástroj méně obvyklý, nebo když je méně obvyklá situace, ve které se nástroj používá. Ještě náročnější jsou úlohy, v nichž je nástroj třeba použít pro zpracování více různých údajů a pro to, abychom je dali do souvislostí, nebo když nástroj používáme velmi neobvyklým způsobem či v neobvyklé situaci, když je nástroj sám o sobě velmi komplexní a je třeba reflexe, máme-li porozumět a kriticky zhodnotit výhody a nevýhody určitého nástroje.

UKÁZKOVÉ ÚLOHY Z MATEMATIKY

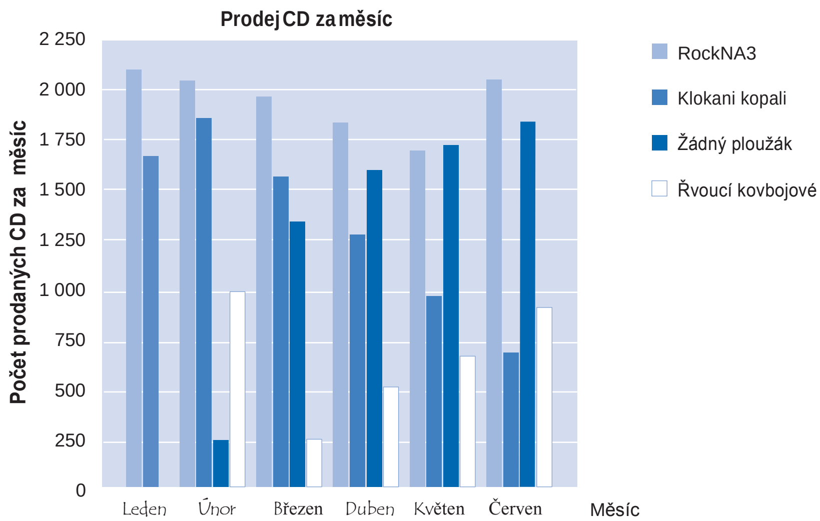
Smyslem následujících úloh projektu PISA je ilustrovat důležitá hlediska koncepčního rámce PISA 2012. Těchto sedm úloh bylo vybráno proto, že představují různé typy otázek, odlišné matematické postupy, obsahy a kontexty a popisují aktivaci rozdílných základních matematických dovedností. V žádném případě však nejsou reprezentativní pro celou škálu každé kategorie.

HITPARÁDA

První zvolená úloha se nazývá *HITPARÁDA*. Její zadání tvoří úvodní text doplněný sloupcovým diagramem, který znázorňuje data o prodeji CD čtyř různých skupin v období šesti měsíců. Za zadáním následují tři jednoduché otázky s výběrem odpovědi (obrázek 1.4).

Obrázek 1.4
Úloha *HITPARÁDA*

V lednu vyšla nová CD kapel *RockNA3* a *Klokani kopali*. V únoru vydaly svá CD kapely *Žádný ploužák* a *Řvoucí kovbojové*. Následující diagram ukazuje prodej těchto CD od ledna do června.



OTÁZKA 1

Kolik CD prodala kapela *Řvoucí kovbojové* v dubnu?

A 250
B 500
C 1 000
D 1 270

OTÁZKA 2

Ve kterém měsíci prodala kapela *Žádný ploužák* poprvé více CD než kapela *Klokani kopali*?

A V žádném
B V březnu
C V dubnu
D V květnu

OTÁZKA 3

Manažer skupiny *Klokani kopali* je znepokojen, protože počet prodaných CD kapely od února do června klesl.

Kolik jejich CD se dá očekávat, že se prodá v červenci, jestliže bude tento nepříznivý vývoj pokračovat?

A 70 CD
B 370 CD
C 670 CD
D 1 340 CD

Při přípravě národních variant testu PISA byly jednotlivé země vyzvány, aby názvy skupin nahradily vhodnými místními fiktivními jmény.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úloha *HITPARÁDA* byla zařazena do testu hlavního šetření PISA 2012. Všechny její tři otázky patří do obsahové kategorie *neurčitost a data, protože* žáci mají číst, interpretovat a používat data předložená v grafické podobě. Všechny tři otázky patří do okruhu *společenského* kontextu, neboť data vypovídají o prodejnosti hudebních nosičů. S takovými údaji se žáci mohou setkávat v novinách, časopisech nebo na internetu. První dvě otázky představují kategorii postupů *interpretování, aplikace a hodnocení matematických výsledků*, jelikož vyžadují interpretaci matematických údajů ze sloupcového diagramu v souvislosti s kontextem. Třetí otázka je z kategorie *používání matematických pojmů, faktů, postupů a* uvažování, jejímž cílem je aplikace procedurálních znalostí práce s matematickou reprezentací, která vede k vyslovení úsudku. Tyto tři otázky patřily v celém testu šetření PISA 2012 k nejsnazším otázkám.

Otázka 1 na obrázku 1.4 vyžaduje pouze vyčtení dat z grafu, což stačí, aby na ni mohli žáci odpovědět. Žáci se musejí v údajích orientovat, určit, která část dat podává informace o prodeji uvedené skupiny, který sloupec představuje vybraný měsíc, a odečíst přímo na svislé ose hodnotu 500 CD. Text je velmi jednoduchý a jasný, *komunikační* nároky jsou velmi nízké, i požadovaná *strategie* je prostá: v grafu stačí vyhledat požadovaný údaj. Ani obtížnost *matematizace* není vysoká. Postačuje formulovat závěr o prodeji přímo z dat v předloženém grafickém modelu. Vyžadovaná dovednost reprezentace je také na nízké úrovni obtížnosti, neboť jde o přímé vyčtení hodnoty ze sloupcového diagramu, jehož formát není pro patnáctileté žáky nijak neznámý. Jediné, co musejí udělat, je přečíst popisky, aby určili, jaká data diagram předkládá. Jedna osa představuje kategorii (měsíce), výška relevantního sloupce je přímo označena (500) na svislé ose. Není tedy třeba žádné hlubší porozumění měřítku. *Technické* znalosti jsou jen o málo obtížnější než formát grafu; stačí přímá dedukce, tedy obtížnost *uvažování a argumentace* je také velmi nízká. Protože se jedná o extrémně jednoduchou položku, úspěšnost žáků v ní byla 87 % (správná odpověď B).

Otázka 2 je jen o málo obtížnější. Úspěšnost žáků při volbě správné odpovědi C byla přibližně 78 %. Správná odpověď vyžaduje pouze nalezení vztahu mezi dvěma sadami dat ve sloupcovém diagramu. Žáci musejí zjistit, jak se tento vztah mění v závislosti na čase, pak lze odpovědět, že podmínka ze zadání je poprvé splněna v dubnu.

Úroveň *komunikační* obtížnosti přibližně odpovídá komunikační obtížnosti otázky 1. Potřebná *strategie* je o něco náročnější, protože je nutno porovnat několik prvků z více datových sad. Co se *matematizace* týká, v zásadě stačí jednoduchá dedukce o prodeji odvozená přímo z grafu. Obtížnost *znázornění* je v této otázce o něco vyšší ve srovnání s prostým přečtením číselného údaje v otázce 1. V otázce 2 je třeba dát do souvislosti dvě sady dat a proměnnou času. Obtížnost *použití symbolického, formálního a technického jazyka i operací* zůstává nízká, jedná se o pouhé kvalitativní srovnání; obtížnost *uvažování a argumentace* je o málo vyšší, protože položka vyžaduje posloupnost několika logických kroků.

Otázka 3 se od předcházejících dvou poněkud liší. Jde o pochopení matematického vztahu, který je zaznamenán v grafu, a o zkoumání tohoto vztahu, aby žáci mohli předpovědět prodej v dalším měsíci. Stále je sice přítomen vztah otázky ke stejnému kontextu, ale v tomto případě už žáci musejí hlavně pracovat s předloženými matematickými údaji. Jedním z možných postupů je prostudovat hodnoty v jednotlivých měsících, odhadnout, o kolik průměrně hodnota v měsících následujících po sobě klesala, a tento úbytek použít pro výpočet hodnoty prodeje v posledním měsíci. *Komunikační* obtížnost je i nadále nízká, podstatné je, aby se žáci nenechali zmást údaji o ostatních kapelách. Zdá se však, že jediná obvykle vybraná chybná možnost byla volena proto, že žáci špatně interpretovali pojem „stejný záporný trend“. Celkově 15 % žáků vybralo možnost C a uvedlo, že červencový prodej bude stejný jako prodej v měsíci červnu. Takto se mohli rozhodnout proto, že zvolili konstantní hodnotu špatného prodeje v červnu a promítli ji do červencového prodeje. Potřebná *strategie* je zjevně náročnější než strategie v prvních dvou otázkách. Zvolenou strategii je třeba v průběhu řešení monitorovat. Žák se musí rozhodnout, např. zda použije veškerá data od února do června, nebo zda bude pracovat s průměrnou změnou od února do června. Dále je třeba se rozhodnout, zda provádět přesné výpočty, zda načrtnout nebo vizualizovat trend, nebo zda pracovat s hrubými odhady s tím, že v každém měsíci prodej klesá přibližně o jednu jednotku na svislé škále. *Matematizace* vyžaduje drobnou úpravu daného modelu, aby vyhovoval kontextu; řešení vyžaduje také výpočet (opakované odčítání víceciferných čísel, čtení údajů na ose mezi danými body), což zvyšuje obtížnost *používání symbolického, formálního a technického jazyka i operací.* Co se týká obtížnosti reprezentace, vyžaduje tato otázka vyvození závěrů o vztahu, který je znázorněn v grafu. K vyřešení úlohy je třeba posloupnost několika kroků uvažování, i přesto patří tato položka k poměrně jednoduchým. Správnou odpověď B vybralo přibližně 76 % žáků.

Obrázek 1.5
Úloha *VÝSTUP NA MOUNT FUJI*

VÝSTUP NA MOUNT FUJI

V Japonsku se nachází známá spící sopka Mount Fuji.

OTÁZKA 1

Každý rok je Mount Fuji přístupná pro veřejnost pouze od 1. července do 27. srpna. V tomto období vystoupí na Mount Fuji okolo 200 000 lidí.

Přibližně kolik lidí průměrně vystoupí na Mount Fuji každý den?

A 340 lidí
B 710 lidí
C 3 400 lidí
D 7 100 lidí
E 7 400 lidí

OTÁZKA 2

Turistická stezka Gotemba, která vede na vrchol Mount Fuji, je dlouhá přibližně 9 kilometrů (km). Turisté se musí z této túry dlouhé 18 km vrátit do 20:00 hodin.

Toshi předpokládá, že je schopný vystoupit na horu průměrnou rychlostí 1,5 kilometru za hodinu a zpátky sestoupit dvojnásobnou rychlostí. Při těchto rychlostech bude mít čas i na přestávky na jídlo a na odpočinek.

V kolik hodin by měl Toshi nejpozději vyrazit, aby se s ohledem na předpokládané rychlosti stihl vrátit do 20:00?

OTÁZKA 3

Toshi si na výstup po turistické stezce Gotemba vzal krokoměr, aby mohl počítat svoje kroky. Jeho krokoměr ukázal, že během výstupu ušel 22 500 kroků.

Odhadni průměrnou délku Toshiho kroku během 9kilometrového výstupu po turistické stezce Gotemba. Výsledek uveď v centimetrech (cm).

Odpověď .... cm

VÝSTUP NA MOUNT FUJI

Druhá ukázková úloha (obrázek 1.5) má název *VÝSTUP NA MOUNT FUJI*. První otázka je jednoduchá položka s výběrem odpovědi, ve druhé a třetí otázce je třeba napsat numerickou odpověď. Ve třetí otázce mohou žáci získat také částečný počet bodů. Tento typ hodnocení se vyskytuje u menší části otázek PISA, v nichž lze poskytnout kvalitativně odlišné typy odpovědí a kde různé typy odpovědí souvisejí s velmi odlišnými dovednostmi.

Úloha *VÝSTUP NA MOUNT FUJI* byla zařazena do testu v hlavním šetření PISA 2012, poté byla uvolněna. Otázky 1 a 3 spadají do obsahového okruhu *kvantita*, protože úkolem žáků je, aby provedli početní operace s daty i mírami a převedli jednotky. Otázka 2 je postavena na pojmu rychlost, proto spadá do okruhu *změna a vztahy*.

Všechny tři otázky jsou ze *společenského* okruhu kontextu, protože hovoří o přístupu veřejnosti na sopku Fuji a na její turistické stezky. První dvě otázky patří do kategorie postupů *formulování situací matematicky*, neboť klíčovým úkolem je vytvořit matematický model, který umožní odpovědět na otázky.

Otázka 3 náleží do kategorie *používání matematických faktů, pojmů, postupů a uvažování*, neboť žáci musejí vypočítat průměr a zároveň věnovat pozornost správném převodu jednotek. Většina práce je tedy čistě matematická, nejde o propojení matematických dat s prvky z kontextu. Uvedené tři otázky mají v rámci testu PISA 2012 různou obtížnost. Otázka 1 je středně obtížná, otázky 2 a 3 jsou velmi obtížné.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V otázce 1 žáci musejí vypočítat průměrný počet návštěvníků denně. Text je velmi jednoduchý a jednoznačný, takže *komunikační* obtížnost položky je nízká. *Strategie* je středně obtížná, protože z daných dat je třeba stanovit počet dní a s pomocí tohoto údaje vypočítat průměr. Jde o řešení vyžadující několik kroků, což už klade nároky na *navržení strategií řešení.* Obtížnost *matematizace* je velmi nízká, neboť matematická data jsou přímo v zadání (počet osob za den). Nízká je i obtížnost *reprezentace*, neboť se v zadání nachází pouze numerická data a text. Požadované *technické* znalosti zastupují výpočet průměru, vyvození počtu dnů, dělení (s použitím kalkulačky či ručně, určuje si každá země), správné zaokrouhlování výsledků. Obtížnost *uvažování a argumentace* je nízká. Jedná se o středně obtížnou položku, a tak úspěšnost žáků při výběru odpovědi C činila v testu PISA 2012 přibližně 46 %. Nejčastěji byla nesprávně vybíraná možnost E (k této možnosti žáci došli, pokud chybně pracovali s 27 dny namísto 31+27 dny), kterou zvolilo 19 % respondentů, a možnost A (chyba v řádu), kterou zvolilo 12 % respondentů.

Otázka 2 je výrazně obtížnější a v testu PISA 2012 na ni správně odpovědělo pouhých 12 % žáků. Jedním z faktorů obtížnosti bylo, že se jednalo o otázku, v níž je třeba *odpověď vytvořit,* nikoli vybrat z nabízených možností. To znamená, že otázka žákům nedává žádný návod, žádnou nápovědu ve formě možných odpovědí. To ale není jediný důvod, proč jde o obtížnou testovou položku. Přibližně 61 % žáků v testu PISA 2012 odpovědělo chybně, ale odpovědělo.

Komunikační obtížnost je nízká a po receptivní stránce připomíná otázku 1. Komunikace vyžadovaná při formulování odpovědi je pouhé použití čísla. Obtížnost *strategie* je ale výrazně vyšší, neboť žáci musejí vytvořit třípoložkový plán postupu. S pomocí průměrné rychlosti musejí spočítat dobu, kterou trvá výstup a sestup, pak s pomocí hodiny, kdy je třeba být v cíli, a doby, kterou cesta trvá, spočítají, v kolik hodin musejí turisté vyrazit. Úroveň *matematizace* je poměrně vysoká. Žáci si musejí uvědomit, že čas na jídla už je započítán a že túra povede nejdřív do kopce a poté z kopce. Obtížnost *znázornění* je minimální, žáci musejí pouze interpretovat text. Naopak obtížnost *použití symbolického, formálního a technického jazyka a operací* je poměrně vysoká. Početní operace jsou sice poměrně jednoduché (i když dělení desetinným číslem 1,5 km za hodinu může působit problémy), ale úloha vyžaduje přesnost a znalost vzorce pro výpočet času s pomocí dráhy a rychlosti, ať už explicitně nebo implicitně. Nároky na *uvažování a argumentaci* jsou také poměrně vysoké.

Obtížná je i otázka 3. Cílem je vypočítat průměrnou délku kroku s pomocí vzdálenosti a počtu kroků. Řešení vyžaduje převod jednotek. Plné bodové hodnocení v této položce v rámci testu PISA 2012 dosáhlo pouhých 11 % žáků, když správně odpověděli, že 40 cm. Částečné bodové hodnocení získaly 4 % žáků za odpovědi jako 0,4 (odpověď v metrech) nebo 4000, což je výsledek způsobený špatným převodem z metrů na centimetry. V rámci šetření PISA 2012 napsalo 62 % žáků chybnou odpověď. *Komunikační* obtížnost zůstává nízká jako u předchozích otázek, protože text je jasný a lze ho snadno interpretovat. Odpověď má formu jednoho čísla. *Strategie*, která je potřeba v otázce 3, je podobná strategii z otázky 1 – v obou případech žáci hledají průměr. Ač je model pro určení „průměru" v obou otázkách podobný, otázka 3 vyžaduje vyšší úroveň *uvažování a argumentace.* V otázce 1 žáci hledají počet „lidí za den", přičemž počet lidí je daný a počet dnů lze snadno vypočítat. V otázce 3 žáci hledají „délku kroku" s pomocí vzdálenosti a počtu kroků. To znamená, že otázka 3 vyžaduje více logického uvažování při propojení různých veličin (například propojení vzdálenosti s délkou). Obtížnost *matematizace* je v otázce 3 také vyšší, neboť je třeba chápat, jaký vztah má veličina „délka kroku" z reálného světa k ostatním jednotkám. Využití kontextu z reálného světa, včetně toho, že délka kroku bude okolo 50 cm (pravděpodobněji než 500 cm nebo 0,5 cm), je nutné, pokud žáci chtějí monitorovat smysluplnost odpovědi. Obtížnost *použití symbolického, formálního a technického jazyka i operací* je také poměrně vysoká, protože jde o dělení malého čísla (9 km) velkým číslem (22 500 kroků) a protože je třeba využít znalost převodu jednotek.

PIZZY

Otevřená úloha s tvorbou odpovědi *PIZZY* (obrázek 1.6) je zdánlivě jednoduchou, ale obsahově bohatou položkou ilustrující celou řadu prvků matematického koncepčního rámce. Původně byla úloha použita v první pilotáži projektu PISA roku 1999, pak byla uvolněna a v každé verzi matematického koncepčního rámce PISA od roku 2003 se používá jako ukázková úloha. V pilotním šetření v roce 1999 patřila k nejtěžším položkám s úspěšností pouhých 11 %.

Úloha *PIZZY* spadá do okruhu *osobního* kontextu, jenž by měl být většině patnáctiletých žáků důvěrně známý. Patří sem proto, že žáci mají zjistit, která pizza představuje pro kupujícího výhodnější koupi. Porozumění textu zadání není obtížné, umožňuje čtenáři soustředit se téměř výhradně na matematické pozadí úlohy.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obrázek 1.6

Úloha *PIZZY*

PIZZY

Pizzerie nabízí dvě kulaté pizzy stejné tloušťky v různých velikostech. Malá má průměr 30 cm a stojí 30 zedů. Velká má průměr 40 cm a stojí 40 zedů.

Která pizza je cenově výhodnější? Uveď svoje zdůvodnění.

Žáci musejí matematicky interpretovat pojmy z běžného života (*kulatá, stejná tloušťka, různé velikosti).* Proměnná „velikost“ je definována matematicky prostřednictvím průměrů obou pizz, cena je uvedena v neutrální měně *zedy,* velikost a cena jsou navzájem propojeny pojmem *výhodnost koupě*.

Položka souvisí s několika oblastmi matematiky, v níž jsou geometrické prvky, které bychom obvykle zařazovali do obsahového okruhu *prostor a tvar.* Pizzy lze modelovat jako tenké válce, takže žáci musejí vypočítat obsah kruhu. Otázka ale také souvisí s obsahovým okruhem *kvantita,* protože úloha implicitně vyžaduje, aby žáci porovnali množství pizzy a množství peněz, nicméně zásadní pro vyřešení úlohy je konceptualizace vztahu mezi vlastnostmi pizzy a pochopení, jaké podstatné vlastnosti odlišují malou a velkou pizzu. Právě tyto vlastnosti tvořící jádro úlohy zařazují celou položku do obsahového okruhu *změna a vztahy*.

Položka spadá do kategorie postupů *formulování situace matematicky.* Zásadní krok pro vyřešení úlohy je formulace matematického modelu *výhodnosti koupě.* Řešitel si musí uvědomit, že vzhledem k tomu, že pizzy mají v ideálním případě stejnou tloušťku, může pracovat s obsahem kruhu (pizzy), nikoli s jejím objemem. Pak lze vztah mezi množstvím pizzy a množstvím peněz modelovat jako „cenu za jednotku obsahu“, nebo případně jako obsah na cenovou jednotku. V matematickém světě potom veličinu *výhodnost koupě* můžeme vypočítat přímo a porovnat ji u obou pizz. U větší pizzy tato veličina nabývá menší hodnoty. Přeneseno do reálného světa, větší pizza představuje výhodnější koupi, neboť za stejnou cenu dostane kupující více.

Jiný možný postup, který ještě jasněji ukazuje, že položka spadá do obsahového okruhu *změna a vztahy,* je uvědomit si (ať už explicitně nebo implicitně), že obsah kruhu roste úměrně k druhé mocnině průměru, takže roste v poměru $(4/3)^2$, zatímco cena roste pouze v poměru (4/3). Protože $(4/3)^2$ je větší než (4/3), představuje větší pizza výhodnější koupi.

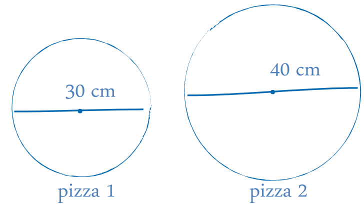
Protože zásadní pro vyřešení úlohy je formulování, byla položka zařazena do kategorie postupů *formulování situací matematicky.* V položce jsou ale také aspekty dalších dvou kategorií. Po zformulování matematického modelu situace ho žáci musejí správně použít, což vyžaduje vhodné logické uvažování a správné použití matematických znalostí výpočtu obsahu a poměru. Výsledky je pak třeba interpretovat v souvislosti s původní otázkou.

Postup řešení úlohy *PIZZY* vyžaduje od žáků různou míru aktivace základních matematických dovedností. *Komunikace* je na poměrně nízké úrovni, neboť žáci čtou a interpretují v zásadě jednoznačně zadanou úlohu. Vyšší je ale *komunikační* obtížnost odpovědi, protože žáci musejí komunikovat a vysvětlit svá řešení. Zásadním požadavkem je *matematizace* situace, v níž žáci musejí zformulovat model *výhodnosti koupě.* Řešitel, když hledá řešení, musí vymyslet reprezentaci podstatných aspektů úlohy včetně symbolického vyjádření vzorce pro výpočet obsahu a vyjádření poměru výhodnosti koupě. Obtížnost *uvažování* (například rozhodnutí, že lze ignorovat tloušťku pizzy, či odůvodnění použitého postupu a získaného výsledku) je velká. Náročné je také *navržení strategie,* jež pomáhá kontrolovat výpočet i modelování. Nesnadnost *použití symbolického, formálního a technického jazyka i operací* souvisí s konceptuálními, faktickými a procedurálními znalostmi, které jsou nezbytné pro práci s geometrií kruhu a pro výpočet poměru. Pokud žáci umějí správně pracovat s kalkulačkou, *použití matematických nástrojů* představuje nízkou úroveň obtížnosti.

Obrázek 1.7 předkládá žákovské řešení úlohy *PIZZY.* Za odpověď tohoto typu by žák dostal plný počet bodů.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Česká školní inspekce

Obrázek 1.7
Ukázka odpovědi na úlohu *PIZZY*



Důležitá část formulování

Tloušťka je stejná, mohu tedy porovnat obsahy

Používání znalostí z obsahových okruhů prostor a tvar, kvantita

Obsah pizzy 1 = πr^2
$= \pi\ 15 . 15\ cm^2$
$= 706.5\ cm^2$
Obsah pizzy 2 = πr^2
$= \pi\ 20 . 20\ cm^2$

Formulování matematického modelu pro určení množství peněz

Cena za cm^2 pizzy 1 = 30 zedu/706,5 cm^2
= 0,04 zedu/cm^2
Cena za cm^2 pizzy 2 = 40 zedu/1256 cm^2
= 0,03 zedu/cm^2

Interpretování matematického výsledku v reálných podmínkách

Pizza 2 je levnější za cm^2 – je cenově výhodnější

ODPADKY

Úloha *ODPADKY* (obrázek 1.8) je zařazena k ukázkovým úlohám proto, že může ilustrovat různá hlediska matematického rámce. Tato úloha s tvorbou odpovědi byla zařazena do testu v hlavním šetření PISA 2003 a později byla uvolněna. Patří ke středně obtížným položkám. Průměrná úspěšnost žáků ze zemí OECD byla málo nad 51 %.

Obrázek 1.8
Úloha *ODPADKY*

Žáci dostali za domácí úkol z ekologie, aby zjistili informace o době rozkladu některých druhů odpadků, které lidé odhazují:

Druh odpadků	Doba rozkladu
Slupky od banánů	1-3 roky
Slupky od pomerančů	1-3 roky
Papírové krabičky	0,5 roku
Žvýkačky	20-25 roků
Noviny	Několik dní
Umělohmotné kelímky	Přes 100 let

Žák chce výsledky znázornit pomocí sloupcového diagramu.

Uveď **jeden** důvod, proč je sloupcový diagram pro znázornění těchto dat nevhodný.

Úloha patří do *vědeckého* okruhu kontextů, protože se zabývá daty vědecké povahy (poločas rozkladu). Patří do obsahového okruhu *neurčitost a data*, neboť se primárně týká interpretace a reprezentace, i když je v položce obsažen také okruh *kvantita*, a to v implicitním požadavku zvážit délku intervalů. Kategorie matematického postupu je *interpretování, aplikace a hodnocení matematických výsledků*, protože žáci mají vyhodnotit účinnost matematického výstupu (v tomto případě v imaginárním nebo načrtnutém sloupcovém diagramu), když se osoba ze zadání snažila

znázornit data z reálného světa. Úloha vyžaduje, aby se žáci zamysleli nad předloženými údaji, aby matematicky promysleli vztah mezi daty a jejich reprezentací a zhodnotili výsledek. Řešitel si musí uvědomit, že tato data lze znázornit pomocí sloupcového diagramu jen velmi obtížně, a to ze dvou důvodů: buď kvůli velkému množství různých poločasů rozkladu pro různé druhy odpadu (takovéto množství různých dat nelze zachytit ve standardním sloupcovém diagramu), nebo kvůli extrémní variaci v proměnné čas u různých druhů odpadků (časová osa, která by umožnila zachytit nejdelší poločas, by nemohla zároveň zachytit nejkratší poločasy rozpadu, jež by pak byly neviditelné). Žáci získávali bodové hodnocení za odpovědi podobné odpovědím uvedeným níže.

ODPOVĚĎ 1

„Protože by bylo těžké to udělat v grafu, protože tam je 1-3, 1-3, 0,5, atd., takže by bylo těžké udělat to přesně."

ODPOVĚĎ 2

„Protože tam je obrovský rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší hodnotou, takže by bylo těžké zachytit data přesně, když tam je 100 let a pár dní."

Postup řešení úlohy *ODPADKY* vyžaduje, aby žáci aktivovali následující základní matematické dovednosti. *Komunikační* obtížnost úlohy souvisí s tím, že žáci musejí přečíst text zadání a interpretovat tabulku. Vyšší *komunikační* úroveň má formulace odpovědi, neboť v ní žáci musejí podat stručný písemný popis logických kroků. Úroveň *matematizace* není vysoká a je třeba při určování a extrahování základních matematických vlastností sloupcového diagramu vzhledem k jednotlivým druhům odpadu. Řešitel musí interpretovat jednoduché reprezentace dat v tabulce a obě reprezentace dát do vzájemné souvislosti. Obtížnost matematického *uvažování* je poměrně malá a totéž platí pro *navržení strategie*. Obtížnost *použití symbolického, formálního a technického jazyka i operací* souvisí s procedurálními a faktickými znalostmi, jež jsou nezbytné pro to, aby si žák vytvořil představu o sloupcovém diagramu nebo si ho mohl načrtnout, a pro porozumění tomu, jaké měřítko se hodí na svislou osu. *Použití matematických nástrojů* není pravděpodobně vůbec potřeba.

ROCKOVÝ KONCERT

Další ukázková úloha *ROCKOVÝ KONCERT* (obrázek 1.9), kde si žáci vybírají odpověď z nabízených možností, byla zařazena do pilotáže k šetření PISA 2003, poté byla uvolněna. V pilotáži volilo správnou odpověď C přibližně 28 % žáků, jedná se tedy o středně obtížnou položku. *ROCKOVÝ KONCERT* patří do *společenského* okruhu kontextu, protože se zaměřuje především na organizaci koncertu, přesto také předpokládá osobní zkušenost s pobytem v davu. Úloha je zařazena do obsahového okruhu *kvantita*, neboť je pro její vyřešení třeba početní operace. Obsahuje také prvky okruhu *prostor a tvar*.

Obrázek 1.9

Úloha *ROCKOVÝ KONCERT*

Pro návštěvníky rockového koncertu byl vyhrazen obdélníkový pozemek o rozměrech 100 m x 50 m. Koncert byl vyprodán a celý pozemek zaplnili stojící posluchači.

Který z následujících údajů je nejlepším odhadem celkového počtu lidí, kteří přišli na koncert?

A 2 000 lidí
B 5 000 lidí
C 20 000 lidí
D 50 000 lidí
E 100 000 lidí

Úloha vyžaduje, aby žáci použili všechny tři kategorie postupů, nejdůležitější z nich je ale *formulování situace matematicky.* Žáci musejí pochopit dané kontextualizované informace (velikost a tvar pozemku; rockový koncert je vyprodán; fanoušci stojí) a přeložit je do použitelné matematické podoby. Také je nezbytné identifikovat chybějící údaje, které lze snadno odhadnout s pomocí znalostí z běžného života, konkrétně vymyslet model pro prostor, jenž potřebuje jeden fanoušek nebo skupina fanoušků. Z hlediska matematiky musí řešitel *použít matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování,* aby dal do souvislosti plochu pozemku a prostor, který zabírá fanoušek nebo skupina fanoušků. Údaje je třeba porovnat kvantitativně. *Interpretování, aplikace a hodnocení matematických výsledků* přichází na řadu při ověřování smysluplnosti řešení nebo při porovnání nabízených odpovědí s výsledkem vlastních početních operací.

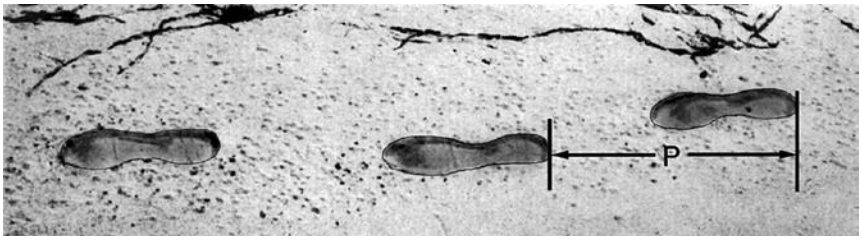
Jiným modelem je představit si, že fanoušci stojí v rovných řadách napříč pozemkem. Pak lze počet fanoušků odhadnout tak, že vynásobíme odhadovaný počet řad odhadem počtu fanoušků v každé řadě. Řešitelé, kteří jsou zdatní ve formulování matematických modelů, jistě ocení efektivitu tohoto modelu, ač je v ostrém kontrastu k tomu, jak se ve skutečnosti fanoušci chovají na rockovém koncertu. V každém případě nezávisí správná odpověď na tom, který z mnoha smysluplných modelů si žák vybere.

V této položce je z matematických dovedností třeba relativně nízká *komunikační* obtížnost, protože žáci musejí přečíst text, porozumět mu, správně interpretovat a pochopit slova jako *obdélníkový* a *rozloha*, frázi koncert *byl vyprodán* a pokyn *odhadněte*. Při tom jim pomohou znalosti z běžného života. Úloha je velmi obtížná z hlediska *matematizace*, neboť ji lze vyřešit jen s pomocí určitých předpokladů o prostoru, který asi zabere stojící osoba. Je také třeba vytvořit základní model jako (počet fanoušků) x (průměrný prostor na fanouška) = (plocha pozemku). Aby toto žáci mohli provést, musejí si v hlavě nebo s pomocí nákresu situaci reprezentovat. *Navržení strategie* vstupuje do procesu řešení této úlohy hned několikrát. Například je třeba rozhodnout, jak úlohu uchopit, představit si, jaký model bude vhodný pro zachycení prostoru, který zabírá jeden fanoušek, uvědomit si, že bude třeba nějaká forma kontroly a ověření výsledku. Podle jedné strategie řešení žák určí plochu na osobu, vynásobí ji počtem lidí z nabízených možností a výsledky porovná s podmínkami ze zadání. Strategie jiného žáka může být opačná. Začne s danou plochou pozemku a postupně ji dělí různými počty osob, jež jsou v nabízených odpovědích. Získá několik možných údajů o prostoru na osobu a rozhodne, která z hodnot nejlépe odpovídá kritériím v zadání. *Použití symbolického, formálního a technického jazyka i operací* přichází na řadu při implementaci vybrané strategie. Je třeba interpretovat i použít data ze zadání a provést nezbytné početní operace, díky nimž žáci dají do souvislosti plochu pozemku s prostorem na osobu. *Uvažování a argumentace* vstupují do hry ve chvíli, kdy žák musí jasně uvažovat o vztazích mezi vytvořeným modelem, výsledkem a reálným kontextem, aby validoval použitý model a ověřil, že vybral správnou odpověď. Je nepravděpodobné, že by žáci potřebovali *používat matematické nástroje*.

CHŮZE

Úloha *CHŮZE* (obrázek 1.10) je postavena na algebraickém vztahu mezi dvěma proměnnými a zdánlivě jde proti intuitivnímu uvažování. Zakládá se na pozorování velkého počtu mužů, kteří se procházejí přirozeným tempem. Žáci odpovídají na dvě otázky, u nichž musejí aktivovat algebraické znalosti a dovednosti. Druhá otázka navíc klade z hlediska patnáctiletých žáků značné nároky na strategické myšlení, uvažování a argumentaci. Úloha byla součástí testu hlavního šetření PISA 2003, poté uvolněna a použita jako ukázková úloha koncepčního rámce PISA 2009 i v dalších publikacích. Žáci musejí v obou otázkách pracovat s danými informacemi a formulovat odpověď. Obě otázky spadají do stejných okruhů: obsahového okruhu *změna a vztahy*, protože se otázky týkají vztahů mezi proměnnými vyjádřenými v algebraické podobě; okruhu *osobního* kontextu, protože jde o záležitosti dotýkající se přímo jedince; a kategorie postupů *používání matematických faktů, pojmů, postupů a uvažování*, protože úlohy jsou zadány ve formě, která už má matematickou strukturu. Žáci mají uvnitř matematiky pracovat a manipulovat s pojmy a objekty.

Obrázek 1.10
Úloha *CHŮZE*



Na obrázku jsou stopy kráčejícího muže. Délka kroku *P* je vzdálenost mezi konci dvou po sobě následujících stop.

Vzorec $\frac{n}{P}$ = 140 udává **přibližně** vztah mezi *n* a *P* pro muže, kde

n je počet kroků za minutu a

P je délka kroku v metrech.

OTÁZKA 1

Použijme vzorec Na Honzovu chůzi, který udělá 70 kroků za minutu. Jak dlouhý krok má Honza? Zapiš postup výpočtu.

OTÁZKA 2

David ví, že délka jeho kroku je 0,80 metru. Použij vzorec na Davidovu chůzi.

Vypočítej rychlost Davidovy chůze v metrech za minutu a v kilometrech za hodinu. Zapiš postup výpočtu.

V šetření PISA 2003 byla u otázky 1 mezinárodní úspěšnost žáků 36 %. Představuje položku obtížnější než 70 % ostatních položek v testu, což je překvapivé, protože matematicky žáci musejí jen dosadit do vzorce $n = 70$ a provést poměrně jednoduchou algebraickou úpravu, která jim umožní určit *P*. Úloha dokládá to, co se v testech PISA ukazuje často; v testových otázkách vycházejících z kontextu běžného života mají patnáctiletí žáci velké potíže a jen málo z nich je schopno využít své znalosti a dovednosti efektivně, a to i když jsou matematické prvky prezentovány jasně a srozumitelně.

Základní matematické dovednosti potřebné v této položce jsou *komunikační* obtížnost, která vychází z nutnosti přečíst si a pochopit zadání a později zformulovat řešení a ukázat, jak k němu žák došel. V úloze není třeba *matematizace*, protože matematický model je dán v takové podobě, která by měla být pro patnáctileté žáky dobře známá. Obtížnost reprezentace je značná, neboť zadání obsahuje informaci v grafické podobě, ve formě textu a algebraického výrazu. To vše je třeba dát do souvislosti. Obtížnost *navrhování strategie* není vysoká, protože strategie je jasně formulovaná přímo v otázce. Minimální je i úroveň *uvažování a argumentace,* a to z toho důvodu, že úloha je jasně zformulovaná a požadované prvky jsou zjevné. *Použití symbolického, formálního a technického jazyka i operací* přichází na řadu, když žáci musejí dosadit a upravit výraz tak, aby výraz vyjadřoval proměnnou *P*.

Otázka 2 je obtížnější. Celkově 20 % úspěšných odpovědí v mezinárodním měřítku řadí tuto otázku mezi 10 % nejobtížnějších položek šetření PISA 2003. Obzvláště náročné je *navržení strategie*, protože je třeba vykonat několik kroků a přitom mít stále na mysli požadovaný cíl: *P* je dáno, tedy *n* lze odvodit z dané rovnice; pokud žák vynásobí *n* proměnnou *P,* získá rychlost v metrech za minutu; to je pak třeba převést s pomocí přímé úměrnosti na kilometry za hodinu. Žáci mohli získat tři různá bodová hodnocení podle toho, kolik správných kroků vykonali ke konečnému řešení. Rozdíl mezi mírou úspěšnosti v otázkách 1 a 2 lze vysvětlit tak, že ukážeme rozdílnou obtížnost aktivace základních matematických dovedností, které vyžadují obě otázky. *Komunikační* obtížnost obou položek je srovnatelná z hlediska čtení a porozumění zadání, ale v otázce 2 je třeba využít obrázek k propojení konkrétního kroku s veličinou krok, což otázka 1 nevyžaduje. Prezentace výsledku také vyžaduje vyšší úroveň komunikačních dovedností než při odpovědi v otázce 1. Úloha navíc vyžaduje *matematizaci*, protože úlohu nelze řešit bez vytvoření modelu Bernardovy chůze v požadovaných jednotkách. Takový postup řešení požaduje v průběhu celého postupu o několika krocích aktivaci efektivních kontrolních mechanizmů. Z toho plyne, že úroveň obtížnosti *navržení strategie* je u otázky 2 výrazně vyšší než u otázky 1. Obtížnost reprezentace je ve druhé otázce také výrazně vyšší než v otázce 1, neboť v tomto případě musí žák aktivně pracovat s daným algebraickým výrazem. Realizace navržené strategie a používání reprezentace v sobě nese *používání symbolického, formálního a technického jazyka i operací.* Žáci musejí provádět algebraické úpravy, pracovat s přímou úměrností a používat při převodu jednotek aritmetické operace. *Uvažování a argumentaci* žáci užívají v rámci myšlenkových procesů, díky nimž postupují v řešení úlohy. Pokud žáci umějí efektivně používat kalkulačku, obtížnost *použití matematických nástrojů* je zjevně na nízké úrovni.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

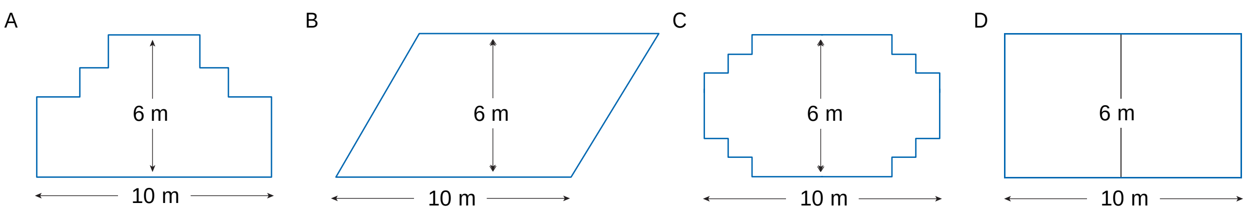
TESAŘ

Ukázková úloha projektu PISA *TESAŘ* (obrázek 1.11) se objevila v šetření PISA 2000 a 2003 a poté byla uvolněna. Je příkladem položky s výběrem odpovědi označované jako komplexní úloha s výběrem odpovědi, kdy žáci vybírají u několika tvrzení či otázek jednu z možností. V tomto případě mohli žáci dostat plný počet bodů, pokud správně rozhodli, že dané množství dřeva stačí na všechny návrhy kromě návrhu B.

Úloha patří do obsahového okruhu *prostor a tvar,* poněvadž v ní žáci pracují s vlastnostmi útvarů, a do *profesního* kontextu, poněvadž se v ní jedná o úkol pro tesaře. Položka spadá do kategorie postupů *používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování*, protože v podstatě se jedná o to, aby žáci aplikovali na dobře definované matematické objekty procedurální znalosti. Úloha ale také zahrnuje určitou míru *interpretace, aplikování a hodnocení matematických výsledků*, neboť žáci musejí dát do souvislosti předložené matematické objekty a kontextuální prvky – omezení nabízeným množstvím dřeva.

Obrázek 1.11
Úloha *TESAŘ*

Tesař má 32 metrů dřeva na ohrazení záhonu na zahradě. Uvažuje o následujících tvarech záhonu.



Zakroužkuj buď „Ano", nebo „Ne" u každého tvaru záhonu podle toho, zda může nebo nemůže být vytvořen z 32 metrů dřeva.

Tvar záhonu	Může být tvar záhonu vytvořen z 32 metrů dřeva?
Tvar A	Ano / Ne
Tvar B	Ano / Ne
Tvar C	Ano / Ne
Tvar D	Ano / Ne

V šetření PISA 2003 tuto jednu z nejobtížnějších úloh, kterou lze vyřešit aplikací geometrických znalostí a dedukcí, správně zodpovědělo méně než 20 % žáků. V zadání je dostatek údajů, jež umožňují přímý výpočet obvodů návrhů A, C a D, které všechny měří 32 metrů. V případě návrhu B ale zadání neposkytuje dostatek údajů, takže je nutný jiný postup. Žáci mohou vydedukovat, že zatímco „vodorovné" prvky všech návrhů jsou stejné, kosé strany návrhu B jsou delší než součet „svislých" položek ostatních návrhů.

Komunikační náročnost vychází z nutnosti přečíst a porozumět zadání a dát do souvislosti text s grafickým *znázorněním* čtyř záhonů. Úloha je zadaná v matematické podobě, takže nevyžaduje žádnou *matematizaci.* Úvahy spojené s kontextem z reálného světa jako úvahy o délce dřevěných prken nebo geometrii rohů v takto zadané úloze nehrají žádnou roli. Klíčová dovednost nezbytná pro vyřešení této úlohy je *uvažování a argumentace*. Jen díky tomu mohou žáci určit, že návrh B má příliš velký obvod, a uvědomit si, že délky jednotlivých „svislých" prvků návrhu A jsou sice neznámé, ale celková „svislá" délka je známá (podobně u návrhu C svislá i vodorovná délka). *Navržení strategie* obnáší, že si žáci musejí uvědomit, že lze zjistit potřebné údaje o obvodu, i když nejsou známy všechny jednotlivé délky. Žáci musejí *používat symbolický, formální a technický jazyk i operace*, když se snaží pracovat s obvody jednotlivých útvarů, musejí rozumět vlastnostem stran a umět sčítat jejich délky. Žáci pravděpodobně nebudou *používat matematické nástroje*.

Poznámky

1. V některých zemích mohou „matematické nástroje“ také označovat matematické postupy, například algoritmy. V rámci koncepčního rámce PISA se pojem „matematické nástroje“ týká pouze fyzických a digitálních nástrojů, které jsou popsány v této části.
2. Proběhla analýza standardů ze dvou souborů zemí. Jednalo se o soubor devíti zemí OECD (Austrállie [Nový Jižní Wales], [vlámská] Belgie, Kanada [Alberta], Finsko, Irsko, Japonsko, Korea, Nový Zéland a Spojené království) a šesti ekonomicky vyspělých zemí ([vlámská] Belgie, Kanada [Alberta], Čínská Taipei, Finsko, Korea a Singapur). Omezením byla nutnost vybrat země, jejichž standardy jsou dostupné i v angličtině.
3. Pokud znáte dřívější koncepční rámce, všimněte si, že nově už kategorii neoznačujeme jako neurčitost, ale neurčitost a data. K této změně došlo proto, aby kategorii popisovala lépe a srozumitelněji. Nedošlo ke změně uvnitř kategorie samé.
4. V rámci projektu PISA bylo na počítači pilotováno v roce 2006 testování přírodních věd, v roce 2009 nepovinné testování čtenářské gramotnosti.